$\pi \approx 3$

NEU NACH LEHRPLAN 2011

MATHE-MATIK 4

SIDLO
PUHM
STEINMAIR
CAMILO
DRS
POLLACK-DRS
WYMLATIL

MIT TECHNISCHEN ANWENDUNGEN

NEU+

- BILDUNGSSTANDARDS
- KOMPETENZORIENTIERT
- ZUR NEUEN RDP

hpt

Eva-Maria Sidlo – Ursula Puhm – Cornelia Steinmair – Christina Camilo
Wolfgang Drs – Susanne Pollack-Drs – Georg Wymlatil

Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 4
Neu nach Lehrplan 2011

Um die Übersicht zu erhöhen und das Arbeiten mit dem Buch zu erleichtern, sind die Aufgaben durch farbige Aufgabennummern differenziert:

- Einstiegsaufgaben (also Aufgaben, die zu einem neuen Themenbereich hinführen) sind durch orangefarbene Aufgabennummern gekennzeichnet.
- **Schwarze** Aufgabennummern kennzeichnen Aufgaben, deren Lösung im Lehrbuch vollständig dargestellt wird. Solche Aufgaben sind darüber hinaus auch durch eine blaue Rasterunterlegung vom übrigen Text deutlich abgegrenzt.
- Die anderen Aufgaben sind je nach Anspruchsniveau durch **rote** (niedriges Anspruchsniveau), **blaue** (mittleres Anspruchsniveau) und **grüne** (hohes Anspruchsniveau) Aufgabennummern gekennzeichnet. Die mit dieser Kennzeichnung vorgenommene Differenzierung ist für den Unterricht nicht verbindlich.

Bei jeder Aufgabe wird angeführt, welche **Handlungsdimensionen** gemäß dem **Kompetenzmodell (Bildungsstandards Angewandte Mathematik BHS)** jeweils angesprochen werden:

A … Modellieren und Transferieren
B … Operieren und Technologieeinsatz
C … Interpretieren und Dokumentieren
D … Argumentieren und Kommunizieren

Die überwiegend angesprochene **Inhaltsdimension** wird jeweils am unteren Seitenrand angeführt.

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur vom 4. August 2014, GZ 5.034/0025-B/8/2014, gemäß § 14 Abs. 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch für den IV. und V. Jahrgang an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage eines zielorientierten Lehrplans verfasst. Konkretisierung, Gewichtung und Umsetzung der Inhalte erfolgen durch die Lehrerinnen und Lehrer.

Schulbuchnummer: 170003

Bildquellen: Alexander Pollack (93/3.139); Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB) Wien (106, 174); Deutsches Museum München (89); Eugen Waage: Vierstellige Logarithmen und Zahlentafeln für den Mathematik-Unterricht, Hölder-Pichler-Tempsky 1977 (8); Fotolia.com: © Adrio (96), © Africa Studio (200, 207), © AGITA LEIMANE (246/9.36), © Alban Egger (177/oben), © Alterfalter (290), © Anatolii (188/unten), © Andrzej Tokarski (247), © Artalis (159), © B. Wylezich (269), © Baronb (59), © Ben Burger (281/10.37), © Bernd Jürgens (164/7.16), © Brian Jackson (175/unten), © Carolin Tietz (146), © Cobalt (198/8.135), © Comugnero Silvana (221/8.190), © dannyrose1993 (199/8.140), © Dark Vectorangel (161), © dasglasauge (172), © Denis Junker (5/oben), © didicox (94), © dimbar76 (287), © djama (163), © Dreadlock (232/9.8), © dripsea (211), © Eisenhans (11, 153), © Elena Schweitzer (281/10.35), © elxeneize (292/43), © FabioBalbi (50/unten), © Focus Pocus LTD (259/9.72), © Fotimmz (284), © fotofrank (164/7.17), © Fotofreundin (248/9.47), © fotogestoeber (277), : © Fotoschlick (198/8.133), © frank peters (187), © Gabriele Rohde (271), © Gary Scott (93/3.133), © generalfmv (45), © GIBLEHO (135), © Gina Sanders (256, 259/9.69), © Himmelssturm (197), © imago13 (181), © joneshon (47), © Jürgen Fälchle (12), © Krawczyk-Foto (239), © kristo74 (210), © lassedesignen (44/oben, 81), © laufer (67), © Leonid Andronov (49), © Leonid Ikan (191), © lofik (177/unten), © Luckyboost (309), © Ludmila Galchenkova (304), © M.Rosenwirth (175/oben, 193/8.116), © Maksim Kabakou (273), © maksymowicz (226), © Malchev (53), © Marco Herrndorff (224), © Maridav (5/unten), © Markus Mainka (44/unten), © mico_images (170), © Mihalis A. (232/9.11), © monticellllo (214/8.177), © Mr Twister (63), © Myst (303), © Natalia Pavlova (27), © Okea (60), © Oleksiy Mark (228/oben), © Olivier Le Moal (132), © Pavel Timofeev (248/9.44), © PHOTOunterwegs (140), © Pixelspieler (14), © Rawpixel (198/8.129), © Robert Kneschke (222), © Sasa Komlen (188/oben), © Schlierner (192, 225), © séb_compiegne (196/8.125), © SG-design (156/oben), © Siegfried Schnepf (58), © Sirarmstrong (82), © SJ-Photo (218), © smuki (221/8.194, 223), © stefanopez (166), © stockdevil (302), © stuporter (293), © sumikophoto (128), © Thomas N. (266), © Thomas Siepmann (236), © tmass (168), © Tran-Photography (178), © TTstudio (6/1.3), © Udo Werner (72), © Uwe Mahnke (299), © vetkit (84), © Witold Krasowski (196/8.120), © ZIHE (306); Janosch A. Slama (10, 50/3.20 B, 305); Merian-Erben (156/unten); The Alan Mason Chesney Medical Archives of The Johns Hopkins Medical Institutions (57); Ute Gierszewski (288, 292/42, 300); Wikimedia Commons (55); alle übrigen von den Autorinnen und Autoren.
In Fällen freier Werknutzung: Schulbuchvergütung/Bildrechte: © Bildrecht GmbH, Wien 2015

1. Auflage 2015 (1,00)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Barbara Fischer, 1230 Wien
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, 2752 Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-03894-4

Bestellschein

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Zu diesem Schulbuch gibt es ein Lösungsheft, das die Lösungen zu den Aufgaben dieses Buchs enthält.

Als Ergänzung zu den im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben und Problemstellungen gibt es 4 Zusatzhefte, die ausführlich dokumentierte technische Anwendungen enthalten und jeweils verschiedene Fachrichtungen berücksichtigen – siehe Bestellabschnitt. In den Zusatzheften sind die Lösungen der dort enthaltenen Aufgaben integriert.

Bitte gib den ausgefüllten und unterschriebenen Bestellabschnitt in deiner Buchhandlung ab oder bestelle direkt beim Verlag:

Adresse: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Frankgasse 4, 1090 Wien
Tel.: 01/403 77 77
E-mail: service@verlaghpt.at

Fax: 01/403 77 77 DW 77

Hiermit bestelle ich mit Rechnung:

Lösungen zu Band 4 (Neu nach Lehrplan 2011)

_____ Expl. Lösungen zu Band 4 (LP 2011)
(ISBN 978-3-230-03895-1)
€ 9,70 inkl. Porto und Verpackung

Zusatzhefte zu Band 4

_____ Expl. Zusatzheft für Bautechnik sowie Innenraumgestaltung und Holztechnik (SBNR 155002)

_____ Expl. Zusatzheft für Elektrotechnik und Elektronik (SBNR 155003)

_____ Expl. Zusatzheft für Maschineningenieurwesen, Mechatronik und Werkstoffingenieurwesen (SBNR 155004)

_____ Expl. Zusatzheft für Wirtschaftsingenieurwesen, Betriebsmanagement, Medientechnik und Medienmanagement, Informationstechnologie, EDV und Organisation, Chemie, Chemieingenieurwesen und Lebensmitteltechnologie (SBNR 155005)
jeweils € 10,90 inkl. Porto und Verpackung

Für alle Angebote gilt: Preisänderungen vorbehalten

Bitte gib deinen Namen und deine Adresse an:

Name:

____

____

Adresse:

____

____

____

Datum und Unterschrift:

____
(bei Minderjährigen des Erziehungsberechtigten)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Modellbildung und Polynominterpolation

1

Naturwissenschaftliche und technische Zusammenhänge können oft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Ist die Gesetzmäßigkeit eines Zusammenhangs bekannt, so kann eine entsprechende Funktionsgleichung angegeben werden. Ist dies jedoch nicht der Fall, so kann man versuchen, eine geeignete Funktion mithilfe von Messwerten zu ermitteln. Die Auswahl eines geeigneten Funktionstyps bezeichnet man in diesem Fall als Modellbildung. Die Parameter der gewählten Funktion werden anhand der Messwerte bestimmt. Mithilfe der so ermittelten Funktionsgleichung können weitere Werte abgeschätzt werden.

1.1 Modellbildung

1.1 Ordne den Zusammenhängen ***1)*** bis ***5)*** jeweils den passenden Funktionstyp ***A)*** bis ***D)*** zu. C

1) senkrechter Wurf: Höhe des Wurfgegenstands in Abhängigkeit von der Zeit
2) Zinseszinsrechnung: Gesamtkapital in Abhängigkeit von der Zeit
3) gleichmäßig beschleunigte Bewegung: Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit
4) Ohm'sches Gesetz: elektrischer Strom in Abhängigkeit von der elektrischen Spannung
5) Kostentheorie: Preis einer Taxifahrt in Abhängigkeit von der Fahrstrecke

A) Konstante Funktion
B) Lineare Funktion
C) Quadratische Funktion
D) Exponentialfunktion

Gesundheitsförderndes Verhalten erlangt immer größere Bedeutung. Um sportliche Leistungen beim Laufen oder Radfahren kontrollieren zu können, helfen heutzutage verschiedene Apps. Sie liefern Informationen über die gelaufene Distanz und Zeit, den Kalorienverbrauch u. v. m. Da aber zum Beispiel der Kalorienverbrauch nicht gemessen werden kann, wird er aufgrund von Messdaten und Modellen berechnet.

1.2 Legen verschiedene Läufer die gleiche Strecke in der gleichen Zeit zurück, so hängt der Kalorienverbrauch von der Masse der jeweiligen Person ab. Die Abbildung zeigt den Kalorienverbrauch V in $\frac{\text{kcal}}{\text{h}}$ während eines Dauerlaufs in Abhängigkeit von der Masse x in kg. ABCD

1) Wähle einen geeigneten Funktionstyp zur Modellierung des Kalorienverbrauchs. Begründe deine Wahl.
2) Benutze den ersten und den letzten Punkt zur Ermittlung der Parameter der Funktionsgleichung und gib diese an.

Lösung:

1) Da die Punkte annähernd auf einer Geraden liegen, wähle ich eine lineare Funktion:
$V = k \cdot x + d$ mit x ... Masse in kg, V ... Kalorienverbrauch in $\frac{\text{kcal}}{\text{h}}$

2) $P_1(50|450)$ und $P_7(80|700)$ • Koordinaten des ersten und des letzten Punkts ablesen

I: $450 = 50k + d$
II: $700 = 80k + d$

$V = \frac{25}{3}x + \frac{100}{3}$

Modellbildung und Polynominterpolation

AC **1.3** Wähle einen passenden Funktionstyp zur Beschreibung des auf dem Foto abgebildeten Regenbogens und gib diese Funktionsgleichung allgemein an. Dokumentiere deine Vorgehensweise.
Lösung:
Ich lege ein Koordinatensystem so, dass der Regenbogen symmetrisch zur senkrechten Achse ist. Ich gehe daher von einer geraden Polynomfunktion mit folgender Funktionsgleichung aus: $y = ax^2 + c$, mit $a < 0$ und $c > 0$

AD **1.4** Gib an, mit welchem Modell die gekennzeichneten Kurven beschrieben werden können.
1) Ellipse, ***2)*** Exponentialfunktion, ***3)*** Trigonometrische Funktion

A) ***B)*** ***C)***

ABC **1.5** Die Abbildung zeigt die Entwicklung der Weltbevölkerung seit dem Jahr 1000.

1) Vergleiche die Entwicklung der Weltbevölkerung im Mittelalter mit jener in der Neuzeit.
2) Ermittle eine lineare Funktion, die die Entwicklung von 1000 bis 1600 annähernd beschreibt.
3) Ermittle eine Exponentialfunktion, die die Entwicklung ab 1600 annähernd beschreibt.
4) Gib mithilfe der in ***3)*** ermittelten Funktion eine Prognose für das Jahr 2050 ab. Vergleiche diese Schätzung mit den offiziellen Schätzungen.

Weltbevölkerung in Millionen; Jahr

BCD **1.6** In einer Kleinstadt wird 10 Tage lang die Feinstaubbelastung gemessen. Anschließend wird im Gemeinderat heftig und kontroversiell über die Ergebnisse dieser Messung diskutiert. Während eine politische Partei den starken Anstieg des Feinstaubs beklagt, sieht eine andere Partei aufgrund des schwachen Anstiegs keinen Grund zu großer Sorge.

A) ***B)***

1) Begründe, welches Modell jeweils zu der Argumentation der Parteien passt.
2) Erkläre, wie die unterschiedlichen Darstellungen zustande gekommen sind.
3) Lies die Messwerte am 1. und am 10. Tag ab. Ermittle die Parameter der Exponentialfunktion, die durch diese beiden Punkte verläuft.

1.2 Lineare Interpolation

1.7 Stephan misst um 7:00 Uhr eine Außentemperatur von −5 °C. Um 12:00 Uhr misst er 7 °C. Ermittle mithilfe einer linearen Funktion die Temperatur um 10:00 Uhr. **AB**

Das Modell der linearen Funktion wird nicht nur dann gewählt, wenn man von einem – zumindest annähernd – **linearen Zusammenhang** ausgehen kann. Es wird auch dann verwendet, wenn nur **zwei Messwerte vorliegen** und man annehmen kann, dass eine lineare Funktion zumindest im dadurch erfassten Teilstück eine sinnvolle Näherung darstellt.

Wird ein Zwischenwert mithilfe der Geraden durch die gegebenen Datenpaare, die Stützpunkte, ermittelt, so spricht man von **linearer Interpolation** (latein: inter = „zwischen“, polire = „glätten, verfeinern“). Liegt der gesuchte Wert hingegen „außerhalb“ des erfassten Bereichs, so spricht man von **Extrapolation**. Dabei wächst die Unsicherheit der Vorhersage mit der Entfernung von den erfassten Messdaten.

Die Gleichung der zu den Stützpunkten gehörigen linearen Funktion muss nicht in jedem Fall ermittelt werden. Soll nur zu einem gegebenen x-Wert der zugehörige y-Wert ermittelt werden, so kann dies mithilfe des Differenzenquotienten geschehen.

Sind von einer Geraden zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ bekannt, so kann mithilfe des Differenzenquotienten zu einem gegebenen x-Wert der zugehörige y-Wert (bzw. auch umgekehrt) ermittelt werden: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Kennt man mehr als zwei Datenpunkte, so kann der im Allgemeinen nicht lineare Funktionsverlauf durch eine **stückweise lineare Funktion** modelliert werden. Dabei werden jeweils zwei benachbarte Punkte durch eine Strecke verbunden, es entsteht ein **Streckenzug** (**Polygonzug**).

1.8 Aus einer Messung erhält man folgende Werte: **BCD**

Zeit in min	2,5	4
Messwert	1	3,5

1) Berechne den Funktionswert für $x_3 = 2{,}75$ mittels linearer Interpolation. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

2) Ermittle den Funktionswert für $x_4 = 4{,}75$. Erkläre, warum es sich dabei nicht um eine Interpolation handelt.

Lösung:

1) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ — Formel für den Differenzenquotienten, x … Zeit, y … Messwert

$\frac{3{,}5 - 1}{4 - 2{,}5} = \frac{y_3 - 1}{2{,}75 - 2{,}5}$ — Die gegebenen Punkte und der Wert für x_3 werden in die Formel eingesetzt.

$\frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{y_3 - 1}{0{,}25} \Rightarrow y_3 = \frac{17}{12}$

2) $\frac{3{,}5 - 1}{4 - 2{,}5} = \frac{y_4 - 1}{4{,}75 - 2{,}5} \Rightarrow y = \frac{19}{4}$

x_4 liegt außerhalb der durch die Messung erfassten Zeit. Die näherungsweise Berechnung des zugehörigen y-Werts ist daher eine Extrapolation.

BCD **1.9** Ein Wetterballon lieferte von einem Wetterflug folgende Daten an die Bodenstation.

Höhe in m	600	1 000	1 900	2 200
Temperatur in °C	23,0	19,2	9,0	8,0

1) Berechne die Temperatur in 1 500 m mithilfe der linearen Interpolationsfunktion.
2) Berechne die Temperatur in 2 000 m mithilfe des Differenzenquotienten.
3) Vergleiche beide Methoden und beurteile den jeweiligen Rechenaufwand.

B **1.10** Kupfer-Zink-Bleche werden in Dicken von $d_1 = 0,1$ mm bis $d_2 = 5$ mm geliefert. Für zwei Dicken wurde die Masse pro m^2, die so genannte flächenbezogene Masse m″, ermittelt.

d in mm	0,2	0,3	0,5	1,7
m″ in $\frac{kg}{m^2}$	1,68	?	4,20	?

Berechne die in der Tabelle fehlenden Werte für die flächenbezogene Masse.

B **1.11** Der Libor (= London Interbank Offered Rate) ist der Zinssatz, zu dem eine bestimmte Gruppe von Londoner Banken Kredite vergibt. Er wird von vielen Banken als Basiszinssatz verwendet. Der Zinssatz für den Schweizer Franken, der CHF-Libor-Zinssatz, wird dabei für sieben verschiedene Laufzeiten (1 Tag, 1 Woche, 1, 2, 3, 6 und 12 Monate) ausgewiesen. An einem bestimmten Tag betragen der 6-monatige CHF-Libor-Zinssatz 0,05640 % und der 12-monatige 0,16740 %. Eine Bank benötigt für ein Geldgeschäft den (geschätzten) 10-monatigen CHF-Libor-Zinssatz. Ermittle diesen.

ABC **1.12** Ein Tabellenbuch für Metalle beinhaltet folgende Tabelle. Aufgrund eines Tintenflecks ist ein Wert nicht mehr lesbar.

Richtwerte für die spezifische Schnittkraft Spezifische Schnittkraft k in $\frac{N}{mm^2}$ für die Spanungsdicke h in mm					
h in mm	0,08	0,10	0,16	0,20	0,31
k in $\frac{N}{mm^2}$	2 945	2 805	2 530	2 410	

1) Berechne die spezifische Schnittkraft für h = 0,31 mm mithilfe des Differenzenquotienten. Verwende zuerst die Daten von h = 0,08 mm und h = 0,20 mm.
2) Führe die Berechnung mit den Daten von h = 0,16 mm und h = 0,20 mm durch.
3) Vergleiche die in **1)** und **2)** ermittelten Werte mit dem einer anderen Tabelle entnommenen tatsächlichen Wert von $k = 2\,185\ \frac{N}{mm^2}$ und interpretiere das Ergebnis.

ABC **1.13** Vor der Erfindung des Taschenrechners wurden viele Berechnungen mithilfe von Tabellenbüchern durchgeführt.

	sin	tg	ctg	cos	
0° 0′	0,000	0,000	∞	1,000	0′ 90°
10′	003	003	343,77	1,000	50′ 89°
20′	006	006	171,89	1,000	40′
30′	009	009	114,59	1,000	30′
40′	012	012	85,94	1,000	20′
0° 50′	015	015	68,75	1,000	10′
1° 0′	0,017	0,017	57,290	1,000	0′ 89°
10′	020	020	49,104	1,000	50′ 88°

1) Vergleiche die Sinuswerte für die Winkel α = 10′, 20′, 30′, 40′ und 50′.
2) Berechne sin(12′) aufgrund der Tabellenwerte.
3) Berechne sin(12′) mit dem Taschenrechner.
Berechne den absoluten und den relativen Fehler des interpolierten Werts, wenn man das Ergebnis des Taschenrechners als korrekten Wert betrachtet.
4) Einer anderen Tabelle wurden folgende Werte entnommen:
sin(89°) = 0,9998; sin(91°) = 0,9998
Argumentiere anhand einer Skizze, warum die Interpolation für diesen Fall nicht sinnvoll ist.

1.3 Interpolationspolynome höherer Ordnung

C

1.14 In einem Labor wurden bei einer Messung die Messpunkte A, B und C bestimmt. Da diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen, wurden für die Auswertung durch Interpolation zwei verschiedene Modelle vorgeschlagen.

1) Beschreibe den Unterschied zwischen den beiden Funktionsgraphen f_1 und f_2.

2) Lies für beide Kurven jeweils den y-Wert für $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ und $x_3 = 9$ ab. Interpretiere die Unterschiede der Ergebnisse.

Sind n (n > 2) Messwerte bekannt, so kann anstelle eines Polygonzugs eine Polynomfunktion (n – 1)-ten Grads zur Interpolation verwendet werden.

AB

1.15 Ein Wetterballon misst die Luftfeuchtigkeit in bestimmten Höhen. Der Messwert in 3 000 m wurde nicht übermittelt und soll nun durch Interpolation ermittelt werden.

Höhe in m	2 100	3 000	3 300	4 500
Luftfeuchtigkeit in %	54,1	?	38,9	52,5

Lösung:

$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$ • drei Messwerte → quadratische Funktion

h … Höhe in m , f … Luftfeuchtigkeit in %

I: $54{,}1 = 2\,100^2 \cdot a + 2\,100 \cdot b + c$ • Gleichungssystem aufstellen und mit Technologieeinsatz lösen

II: $38{,}9 = 3\,300^2 \cdot a + 3\,300 \cdot b + c$

III: $52{,}5 = 4\,500^2 \cdot a + 4\,500 \cdot b + c$

$f(h) = 10^{-5}h^2 - \frac{1}{15}h + 150 \Rightarrow f(3\,000) = 40$ • gesuchten Wert interpolieren

Der interpolierte Wert für die Luftfeuchtigkeit in 3 000 m Höhe beträgt 40 %.

Interpolationspolynom nach Newton

Das nach Isaac Newton benannte Verfahren zur Ermittlung eines Interpolationspolynoms durch n Punkte soll nun anhand eines Beispiels erklärt werden.

ZB: Durch die Stützpunkte $P_1(1|2)$, $P_2(3|6)$ und $P_3(5|18)$ wird ein Interpolationspolynom gelegt. Diese Polynomfunktion lässt sich einfacher bestimmen, wenn man sie wie folgt anschreibt:

$y = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$

Die Koeffizienten a_i werden durch Einsetzen der Punkte in die Funktionsgleichung ermittelt.

P_1: $2 = a_1 + a_2(1 - 1) + a_3(1 - 1)(1 - 3) \Rightarrow 2 = a_1$ • $y_1 = a_1 + a_2(x_1 - x_1) + a_3(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)$

P_2: $6 = 2 + a_2(3 - 1) + a_3(3 - 1)(3 - 3) \Rightarrow 2 = a_2$ • $y_2 = a_1 + a_2(x_2 - x_1) + a_3(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)$

P_3: $18 = 2 + 2 \cdot (5 - 1) + a_3(5 - 1)(5 - 3) \Rightarrow 1 = a_3$ • $y_3 = a_1 + a_2(x_3 - x_1) + a_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$

$y = 2 + 2 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (x - 1)(x - 3)$ • $y = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$

$y = x^2 - 2x + 3$ … Interpolationspolynom nach Newton

Die Berechnung kann auch mithilfe des leicht erweiterbaren, rechts dargestellten Schemas erfolgen. Die Koeffizienten a_i sind in diesem Fall **dividierte Differenzen**.

Es gilt:

$y_1 = a_1$, $y_{12} = a_2$, $y_{123} = a_3$

x_1, y_1

$y_{12} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

x_2, y_2

$y_{123} = \frac{y_{12} - y_{23}}{x_1 - x_3}$

$y_{23} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$

x_3, y_3

Modellbildung und Polynominterpolation

Spline-Funktionen

Liegen mehr als drei Messwerte vor, so kann die durch die gegebenen Punkte verlaufende Polynomfunktion oft stark ausschwingen. Dieses Problem wird umso größer, je mehr Messwerte vorliegen. Um dennoch eine „glatte“ Kurve durch die gegebenen Punkte ermitteln zu können, wird dabei oft eine andere Methode gewählt, die ursprünglich aus dem Schiffsbau stammt. Man verwendet ein spezielles Kurvenlineal, eine so genannte Skraklatte, eine im Englischen „spline“ genannte, elastische Holzlatte, mit deren Hilfe geschwungene Kurven gezeichnet werden können.

Bei dieser Methode verbindet man **jeweils zwei benachbarte Punkte** durch ein Polynom, sodass ein **Polynomzug** entsteht. Die einzelnen Polynome werden so gewählt, dass an den gemeinsamen Punkten die Funktionswerte und die Steigungen übereinstimmen. Abhängig vom Grad des Polynoms werden noch weitere zusätzliche Bedingungen festgelegt. Die so erhaltene Funktion wird **Spline-Funktion** genannt.

Sie ist ein stückweise aus verschiedenen Funktionen zusammengesetzter Polynomzug. Handelt es sich um quadratische bzw. kubische Funktionen, so spricht man von einer quadratischen bzw. kubischen Spline-Funktion.

Bei der **Spline-Interpolation** werden Polynomfunktionen aneinander gereiht. Bei der quadratischen Spline-Funktion müssen die Funktionswerte und die 1. Ableitungen an den gemeinsamen Stützstellen übereinstimmen. Bei einer kubischen Spline-Funktion müssen zusätzlich die 2. Ableitungen übereinstimmen. Die zur Berechnung aller Koeffizienten noch fehlenden Bedingungen werden unter Berücksichtigung des Sachzusammenhangs festgelegt.

TE

ZB: Aus einer Messung kennt man 3 Stützpunkte $P_1(0|0)$, $P_2(2|1)$ und $P_3(5|-1)$, die man durch eine quadratische Spline-Funktion verbinden möchte. Weiters soll die Kurve in P_3 eine waagrechte Tangente haben.

$f_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$f_1(2) = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$
$f_2(2) = 1 \Rightarrow 1 = d \cdot 2^2 + e \cdot 2 + f$
$f_2(5) = -1 \Rightarrow -1 = d \cdot 5^2 + e \cdot 5 + f$
$f_1'(2) = f_2'(2) \Rightarrow 2a \cdot 2 + b = 2d \cdot 2 + e$
$f_2'(5) = 0 \Rightarrow 0 = 2d \cdot 5$

$f_1 = -\frac{11}{12}x^2 + \frac{7}{3}x$

$f_2 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{41}{9}$

- Bei 3 Stützstellen benötigt man zwei Parabeln.
- Die Punkte P_1 und P_2 werden in f_1 eingesetzt. Die Punkte P_2 und P_3 werden in f_2 eingesetzt.
- Die 1. Ableitungen in P_2 werden gleichgesetzt.
- Zusätzlich gilt: $f_2'(5) = 0$
- Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mithilfe von Technologieeinsatz.

- Die grün eingezeichnete Parabel f_1 verbindet die ersten beiden Punkte, die blau eingezeichnete Parabel f_2 die nächsten beiden Punkte.
- Die Spline-Funktion ist rot dargestellt.

Modellbildung und Polynominterpolation

1.16 Im Zuge einer Messung werden zwölf Messdaten erhoben, die zur Berechnung eines Interpolationspolynoms verwendet werden. **D**

1) Gib an, welchen Grad das Interpolationspolynom hat.

2) Zwei Studierende werden mit der Berechnung des Interpolationspolynoms beauftragt. Der erste Studierende löst die Aufgabe mit einem Gleichungssystem, der zweite mithilfe der Interpolation nach Newton.
Begründe, warum beide dieselbe Funktionsgleichung erhalten.

1.17 Frau Dr. Hufnagl führt eine quantitative Analyse zur Bestimmung der Konzentration einer Lösung durch und erhält die drei Messwerte P(1|5), Q(2|6) und R(3|9). Um weitere Werte berechnen zu können, stellt sie ein Interpolationspolynom $y = ax^2 + bx + c$ auf. **BCD**

1) Bereche die Koeffizienten a, b und c mithilfe eines Gleichungssystems.

2) Berechne diese Koeffizienten mithilfe des Interpolationsverfahrens nach Newton.

3) Vergleiche den Rechenaufwand und beurteile beide Methoden.

1.18 Eine Messung liefert die Messdaten $P_1(1|1)$, $P_2(3{,}5|1{,}5)$, $P_3(4|3)$, $P_4(6|4)$. **B** TE

1) Ermittle das Interpolationspolynom mithilfe von Technologieeinsatz.

2) Ermittle quadratische Spline-Funktionen, wobei als zusätzliche Bedingung gelten soll, dass die Tangente in P_1 waagrecht verläuft.

1.19 Der tägliche Gewinn eines Kleinunternehmens, das spezielle Verpackungskartons für den Heimwerkerbedarf herstellt, soll durch eine kubische Funktion beschrieben werden. **AB** TE
Bekannt sind die folgenden Daten:
Am 1. März ergab sich ein Gewinn von 1 050,00 €, am 1. April ein Gewinn von 2 130,00 €, am 1. Mai ein Gewinn von 1 560,00 € und am 1. Juni ein Gewinn von 890,00 €. Jemand möchte wissen, wie hoch der Gewinn am 1. August sein wird. Gib mithilfe eines Interpolationspolynoms eine Schätzung für den Gewinn an. Gehe davon aus, dass an 7 Tagen pro Woche produziert wird.

1.20 Überprüfe, ob die gegebene Funktion f eine Spline-Funktion für die Stützstellen $P_1(0|1)$, $P_2(2|3)$ und $P_3(6|1)$ darstellt. **BD** TE

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + x + 1 & 0 \leqslant x < 2 \\ \frac{9}{64}x^3 - \frac{51}{32}x^2 + \frac{79}{16}x - \frac{13}{8} & 2 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

1.21 Auf einer Kreuzfahrt wurde an jeweils gleich weit entfernten Stellen der Treibstoffverbrauch bei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen: **B** TE
Bei einer Fahrgeschwindigkeit von drei Knoten wurden 75 $\frac{t}{Tag}$ verbraucht. Bei sieben Knoten wurden 280 $\frac{t}{Tag}$, bei zwölf Knoten 1 050 $\frac{t}{Tag}$ und bei 18 Knoten 2 400 $\frac{t}{Tag}$ Treibstoff verbraucht.

1) Berechne eine kubische Näherungsfunktion für den Treibstoffverbrauch mithilfe des Interpolationspolynoms nach Newton.

2) Wie viel Treibstoff verbraucht das Schiff bei einer Geschwindigkeit von 20 Knoten?

Hinweis: 1 Knoten = $1\,\frac{\text{Seemeile}}{\text{h}} = 1{,}85\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Modellbildung und Polynominterpolation

Zusammenfassung

Das Aufsuchen eines geeigneten Funktionstyps im Sachzusammenhang bezeichnet man als **Modellbildung**.
Sind von einem Zusammenhang lediglich einige Punkte, so genannte Stützpunkte, bekannt, so kann eine Näherungsfunktion durch diese Punkte gelegt werden. Wird mithilfe dieser Funktion ein Zwischenwert bestimmt, so spricht man von **Interpolation**, liegt der gesuchte Wert „außerhalb" des erfassten Bereichs, so spricht man von **Extrapolation**.

Interpolationspolynom nach Newton für n Stützpunkte $P_i(x_i|y_i)$ mit i = 1, 2, ..., n
$p(x) = a_1 + a_2 \cdot (x - x_1) + a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + ... + a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1})$

Bei der **Spline-Interpolation** werden Polynomfunktionen aneinander gereiht. An den gemeinsamen Stützstellen müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein.

Weitere Aufgaben

BCD TE **1.22** Auf einer Teststrecke wurde der Anhalteweg s eines Autos bei drei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen.

	1	2	3
v in $\frac{km}{h}$	32	50	80
s in m	16,2	31,0	63,5

1) Gib die Funktionsgleichung für eine stückweise lineare Interpolation an.
2) Berechne die quadratische Funktion f, die durch die drei Punkte verläuft.
3) Stelle die Funktionen aus **1)** und **2)** grafisch dar.
4) Argumentiere anhand der Grafik, für welche Geschwindigkeiten die beiden Modelle gleichwertig sind und für welche Bereiche es große Unterschiede gibt.

ABD TE **1.23** Die Stützstellen A(−2|3), B(0|1) und C(3|2,5) wurden durch eine Messung ermittelt. Durch diese Punkte soll eine kubische Spline-Funktion gelegt werden.
1) Gib alle acht Bedingungen an, die zur Ermittlung der Funktionen f_1 (zwischen A und B) und f_2 (zwischen B und C) notwendig sind. Ergänze die frei wählbaren Bedingungen so, dass die Kurve an beiden Enden waagrecht ausläuft.
2) Überprüfe, ob die Funktionen f_1 und f_2 diese Bedingungen erfüllen.
$f_1(x) = \frac{7}{20}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - \frac{3}{5}x + 1$ $\qquad$ $f_2(x) = -\frac{8}{45}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - \frac{3}{5}x + 1$

ABC TE **1.24** Jemand möchte von Neustift am Walde (250 Höhenmeter) nach Nußdorf (200 Höhenmeter) wandern. Das auf- und abführende Geländeprofil des Wanderwegs kann annähernd durch eine Polynomfunktion vierten Grads approximiert werden. Dazu werden die Höhenmeter abgelesen und die horizontalen Entfernungen aus einer Wanderkarte mit dem Maßstab 1 : 100 000 abgemessen. Die erste Pausenstation Bellevue befindet sich auf 400 m Höhe 3 cm von Neustift entfernt. Die zweite Rast macht der Wanderer in Grinzing auf einer Höhe von 250 m, 5 cm von Neustift entfernt. Die dritte Pause ist auf dem Eichelhofweg in 350 m Höhe, 8 cm von Neustift entfernt. Von dort geht es in das 15 cm von Neustift entfernte Nußdorf. Bestimme das Geländeprofil mithilfe des Interpolationspolynoms nach Newton.

Modellbildung und Polynominterpolation

1.25 Runges Phänomen (benannt nach Carl David Tolmé Runge, deutscher Mathematiker, 1856 – 1927) zeigt auf, dass mehr Stützpunkte nicht zwingend zu einer besseren Interpolation führen. Wird die Funktion $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ – auch Runge-Funktion genannt – mithilfe von n äquidistanten Stützpunkten $P_i(x_i|y_i)$ im Intervall $[-1, 1]$ mit $x_i = \frac{2i}{n} - 1$ $(i = 0, 1, ..., n)$ durch eine Polynomfunktion vom Grad $\leqslant n$ dargestellt, so oszilliert die Polynomfunktion am Ende des Intervalls um so stärker, je größer n wird. Zeige dieses Phänomen grafisch zuerst für eine Polynomfunktion 5. Grads und anschließend für eine Polynomfunktion 9. Grads. Verwende dazu 6 bzw. 10 äquidistante Stützpunke.

ABC

Aufgaben in englischer Sprache

interpolation	Interpolation	order	Grad einer Funktion
interpolation polynomial	Interpolationspolynom	piecewise linear interpolation	stückweise lineare Interpolation
Newton polynomial	Interpolationspolynom nach Newton	spline curve	Spline-Kurve

1.26 The specific weight of water at the temperature $T_1 = 60$ °F is $\gamma_1 = 62{,}37\,\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$. At the temperature $T_2 = 70$ °F it is $\gamma_2 = 62{,}30\,\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$. Find the specific weight at the temperature $T = 63$ °F. (F … Fahrenheit; lb … Latein: „Libra", pound; ft … foot)

AB

1.27 The monthly payment on a 20-year mortgage of \$ 50,000.00 for two different annual interest rates is given in a table. Use Newton polynomial to estimate the monthly payment corresponding to an interest rate of 8.50 % per year.

AB

Annual Interest Rate	Monthly Payment
6.50 %	\$ 650.00
10.00 %	\$ 900.00

Wissens-Check

		gelöst
1	Begründe, ob die Aussage richtig oder falsch ist. A) Sind drei Stützpunkte gegeben, so muss die durch diese Punkte verlaufende Funktion immer eine quadratische Funktion sein. B) Ein interpolierter Wert entspricht nie dem exakten Wert.	
2	Gib die Dichte ρ von Wasser bei 35 °C näherungsweise an, wenn gilt: $\rho(30\,°C) = 0{,}99567\,\frac{g}{cm^3}$ und $\rho(40\,°C) = 0{,}99224\,\frac{g}{cm^3}$	
3	Ich kenne den Unterschied zwischen Interpolation und Extrapolation eines Funktionswerts.	
4	Ich kann das Prinzip einer Spline-Funktion erklären.	

Lösung:
1) A) Falsch: Drei Stützpunkte können auch auf einer anderen Funktion liegen. B) Falsch: Die Interpolationsfunktion kann mit der exakten Funktion übereinstimmen.
2) $\rho(35\,°C) = 0{,}993955\,\frac{g}{cm^3}$
3) siehe Seite 7
4) siehe Seite 10

2 Unendliche Reihen

Taschenrechner ermöglichen Berechnungen wie sin(20°) oder e^5 rasch und unkompliziert. Doch auch schon zu Zeiten, in denen lediglich einfache Rechenhilfsmittel zu Verfügung standen, konnten – aus heutiger Sicht – erstaunlich genaue Berechnungen durchgeführt werden. So gelang es dem schottischen Mathematiker James Gregory (1638 – 1675), neue Methoden für die Berechnung der Kreiszahl π zu entwickeln. Er verwendete dafür spezielle unendliche Reihen, um $\frac{\pi}{4}$ zu approximieren. Im folgenden Abschnitt werden unendliche Reihen untersucht, die zur Berechnung von Funktionswerten verwendet werden können bzw. solche, die Funktionen annähern.

2.1 Wiederholung

C **2.1** **1)** Veranschauliche die unendliche Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ mithilfe eines Kreisdiagramms und gib ihre Summe an.
2) Schreibe die Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{33} + \dots$ mithilfe des Summenzeichens an.
3) Argumentiere, warum die Summe aus **2)** kleiner sein muss als jene aus **1)**. Gib ein Intervall an, in dem die Summe aus **2)** daher liegen muss.

Bevor die Konvergenz von beliebigen Reihen untersucht wird, werden einige Grundbegriffe wiederholt.

Die **angeschriebene Summe einer (Zahlen-)Folge** nennt man **Reihe**.
Folge: $a_n = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$ Reihe: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

Die Summe einer Reihe mit endlich vielen Gliedern kann durch Addition ermittelt werden. Hat die Reihe unendlich viele Glieder, so ist die Berechnung der Summe durch Addition nicht möglich. Die Summe wird deshalb mithilfe der Folge der Partialsummen s_n ermittelt.
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Existiert der **Grenzwert der Partialsummenfolge**, so bezeichnet man ihn als **Summe S der unendlichen Reihe** und nennt die Reihe **konvergent**. Existiert dieser Grenzwert nicht, nennt man die Reihe **divergent**.

CD **2.2** Schreibe die Reihen mithilfe des Summenzeichens an. Welche ist konvergent, welche divergent? Begründe deine Antwort, ohne den Grenzwert zu berechnen.

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ **2)** $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \dots$ **3)** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

BD **2.3** Die harmonische Reihe lautet: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

1) Erkläre, wie in der Abbildung die Summanden dieser Reihe veranschaulicht werden.
2) Vergleiche die Fläche der ersten 4 Rechtecke mit der Fläche unter der Kurve im Intervall [1; 5].
3) Ermittle $\lim\limits_{b \to \infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x}\right) dx$. Begründe damit die Divergenz der harmonischen Reihe.

2.2 Konvergenz

Für viele mathematische Argumentationen ist es ausreichend, zu wissen, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist, also ob ihre Summe eine reelle Zahl ist. Da das Ermitteln dieser Summe oft sehr aufwändig ist, werden Kriterien entwickelt, um die Konvergenz bzw. die Divergenz beurteilen zu können.

2.2.1 Notwendige Konvergenzbedingung

2.4 **1)** Ermittle für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$ die Reihenglieder a_1, a_{10}, a_{50} und a_{100}. Welchem Wert nähern sich die Reihenglieder für $n \to \infty$? Ermittle die Teilsummen s_{10}, s_{50} und s_{100}. Welchem Wert nähern sich diese Teilsummen?

BD TE

2) Gib an, welchem Wert sich die Glieder der Reihe 1,1 + 1,01 + 1,001 + ... nähern. Berechne weiters die Teilsummen s_2, s_3 und s_4. Erkläre mithilfe der Reihenglieder, warum die unendliche Reihe divergent ist.

Anhand der folgenden Reihen wird zunächst ein Kriterium erläutert, welches die Entscheidung ermöglicht, ob eine Reihe divergent sein muss oder konvergent sein kann.

- 1. Reihe: 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + ...
  Bildet man die Teilsummenfolge s_n, so erkennt man: $s_{n+1} = s_n + 0{,}1$
  Der Zuwachs beträgt konstant 0,1. Die Folge kann daher nicht konvergent sein. Die Reihe ist also divergent.
- 2. Reihe: 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + ...
  Die Reihenglieder nähern sich dem Wert 0, die Partialsummen s_n nähern sich dem Wert $1{,}\dot{1}$, die Reihe ist daher konvergent.
- 3. Reihe: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$
  Auch für diese Reihenglieder gilt $a_n \to 0$. In Band 3, Abschnitt 1.4, wurde bereits gezeigt, dass diese Reihe, die **harmonische Reihe**, divergent ist.

Allgemein kann man feststellen:
Bilden die Glieder einer Reihe keine Nullfolge, so ist die Reihe sicher divergent. Bilden die Glieder der Reihe hingegen eine Nullfolge, so **kann** die Reihe konvergent sein. Bei der Bedingung „Reihenglieder bilden eine Nullfolge" handelt es sich also um eine Voraussetzung für die Konvergenz, also eine **notwendige Bedingung**. Ist sie nicht erfüllt, ist die Reihe nicht konvergent. Ist die Bedingung erfüllt, folgt daraus aber noch nicht, dass die Reihe tatsächlich konvergiert. Die Bedingung ist daher **keine hinreichende Bedingung**.

Notwendige Konvergenzbedingung für unendliche Reihen
Die Glieder jeder konvergenten unendlichen Reihe bilden eine Nullfolge. Es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 0$
Der Umkehrschluss gilt nicht. Ist $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = 0$, so kann die Reihe auch divergent sein.
Ist jedoch $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) \neq 0$, so ist die Reihe sicher divergent.

2.5 Überprüfe, ob die folgenden Reihen konvergent sein können. Erkläre, welche Reihen divergent sein müssen.

BD

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}1^n$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ **4)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

2.2.2 Hinreichende Konvergenzkriterien

Um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, deren Glieder eine Nullfolge bilden, werden zusätzliche, so genannte **hinreichende Bedingungen** benötigt.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen

Haben die Glieder einer Folge abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, so bezeichnet man eine solche Folge als alternierende Folge, die zugehörige Reihe als **alternierende Reihe**. Gottfried Wilhelm Leibniz (deutscher Mathematiker, 1646 – 1716) stellte für die Konvergenz von alternierenden Reihen das so genannte **Leibniz-Kriterium** auf.

Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen
Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots$ mit $a_n > 0$ ist konvergent mit dem Grenzwert S, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $0 < S < a_1$

Beweis:

$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + \dots$ • $a_n > a_{n+1}$, da monoton fallend

$S = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \underbrace{(a_5 - a_6)}_{>0} + \underbrace{(a_7 - a_8)}_{>0} + \dots$ • Es gilt: $S > 0$

$S = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{>0} - \underbrace{(a_6 - a_7)}_{>0} - \dots$ • Es gilt: $S < a_1$

$\Rightarrow \; 0 < S < a_1$ ... Die Reihe konvergiert. q. e. d.

ZB: Die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ wird auf Konvergenz geprüft.

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ • Die Glieder bilden eine Nullfolge.

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow\; n + 1 > n$ wahre Aussage • Die Glieder sind monoton fallend.

Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent.

Vergleichskriterien – Majorantenkriterium und Minorantenkriterium

Um über Konvergenz bzw. Divergenz entscheiden zu können, können Reihen auch mit anderen Reihen verglichen werden, von denen man bereits weiß, ob sie konvergent oder divergent sind.

Soll zum Beispiel die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} + \dots$ bestimmt werden,

so werden die einzelnen Glieder mit jenen der konvergenten Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

verglichen. Dabei kann man folgendes Bild verwenden:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n =$	1 +	$\frac{1}{2}$ +	$\frac{1}{4}$ +	$\frac{1}{8}$ + ...	= 2 ... konvergent
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n =$	1 +	$\frac{1}{2 \cdot 2}$ +	$\frac{1}{3 \cdot 4}$ +	$\frac{1}{4 \cdot 8}$ + ...	≤ 2

Da fast alle Glieder a_n kleinergleich als die jeweiligen Vergleichsglieder b_n sind, gilt auch:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist, muss auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sein.

Dieses Vergleichskriterium nennt man **Majorantenkriterium** (latein: „maior“ = größer). Dabei genügt es, wenn fast alle, also alle bis auf endlich viele, Glieder die Bedingung $a_n \leqslant b_n$ erfüllen. Endlich viele Glieder, die diese Bedingung nicht erfüllen, haben keinen Einfluss darauf, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist.

Eine Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, der Umkehrschluss gilt jedoch nicht.

Majorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent. Gilt für fast alle Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ ist, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man **konvergente Majorante**.

Ist das Majorantenkriterium nicht erfüllt, so kann die Reihe trotzdem konvergent sein.

In ähnlicher Weise kann die **Divergenz** einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gezeigt werden, indem die Glieder mit jenen einer divergenten Reihe verglichen werden. Dieses Kriterium nennt man **Minorantenkriterium** (latein: „minor“ = kleiner).

Minorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist divergent. Gilt für fast alle Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $a_n \geqslant b_n \geqslant 0$ ist, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man **divergente Minorante**.

Ist das Minorantenkriterium nicht erfüllt, so kann die Reihe trotzdem divergent sein.

Quotientenkriterium und Wurzelkriterium

In vielen Fällen ist es möglich, die Konvergenz einer Reihe mithilfe des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Glieder zu berechnen. Das so genannte **Quotientenkriterium** (Konvergenzkriterium von d'Alembert) wurde von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (französischer Mathematiker, 1717 – 1783) aufgestellt.

Beim **Wurzelkriterium** wird statt des Quotienten die n-te Wurzel zur Prüfung auf Konvergenz verwendet.

Gegeben ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und es existiert der Grenzwert g.

Quotientenkriterium	**Wurzelkriterium**
$g = \lim_{n \to \infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert$	$g = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$

Ist $g < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
Ist $g > 1$, so divergiert die Reihe.
Ist $g = 1$, so ist eine Entscheidung über die Konvergenz mit diesem Kriterium nicht möglich.

Unendliche Reihen

BD **2.6** Prüfe mithilfe des Minorantenkriteriums, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ divergent ist.

Lösung:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} + \ldots$ wird verglichen mit:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ● Divergent, da die harmonische Reihe divergent ist.

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$ ● Nullfolge

$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ für alle $n > 1$ ● $\ln(n+1) < (n+1)$

Die Reihe divergiert, weil die harmonische Reihe divergiert.

BD **2.7** Zeige mithilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ $(c \in \mathbb{R})$ konvergiert.

Lösung:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} = \frac{c^{n+1} \cdot n!}{c^n \cdot (n+1)!} = \frac{c}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c}{n+1}\right| = 0 < 1$, die Reihe ist konvergent.

TE Aufgaben 2.8 – 2.9: Berechne die Summen s_{10} und s_{100} der angegebenen Reihen. Argumentiere, weshalb du Konvergenz bzw. Divergenz vermutest. Prüfe anschließend deine Vermutung mittels eines geeigneten Vergleichskriteriums.

BD **2.8** **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \ldots$

BD **2.9** **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{2!}{4} + \frac{3!}{27} + \frac{4!}{256} + \frac{5!}{3\,125} + \ldots$

BD **2.10** Prüfe die angegebene Reihe mithilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$ **c)** $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{9^3} \pm \ldots$

BD **2.11** Prüfe die angegebene Reihe mithilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n}{5^n}$

BD **2.12** Prüfe die angegebene Reihe mithilfe des Wurzelkriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{1+2n}\right)^n$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}}$ **c)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$ **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot n!$

Aufgaben 2.13 – 2.14: Prüfe auf Konvergenz. Wähle ein geeignetes Verfahren.

BD **2.13** **a)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ **b)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^{100}}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots$

BD **2.14** **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot n$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ **d)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n-1)}}$

BD **2.15** Prüfe, ob $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \pm \ldots$ konvergent ist.

2.3 Potenzreihen

2.3.1 Grundbegriffe

2.16 ***1)*** Für sehr kleine Winkel x (in rad) gilt: $\sin(x) \approx x$. Berechne $\sin(x)$ für $x = 0{,}05$; $x = 0{,}1$ und $x = 0{,}5$ mit dem Taschenrechner und vergleiche die Werte mit der Näherung. BC

2) Eine weitere Näherung kann mit $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ erreicht werden. Berechne $\sin(x)$ für $x = 0{,}05$; $x = 0{,}1$ und $x = 0{,}5$ mithilfe der Näherung und vergleiche die Näherungswerte mit jenen aus ***1)***.

Polynomfunktionen $P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_n \cdot x^n$ wurden bereits in Band 2, Abschnitt 2.4, besprochen.
Für $n \to \infty$ erhält man eine „unendlich lange" Polynomfunktion, die man **Potenzreihe** nennt.

Eine **Potenzreihe** P ist eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \ldots \text{ mit } c_n \in \mathbb{R}.$$

Die Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sind die Koeffizienten der Potenzreihe.

Ein besonders „altes" Problem in der Mathematik ist das Ermitteln von Näherungswerten. Mit dem mathematischen Fortschritt wurde es notwendig, Berechnungsmethoden zu finden, die ein näherungsweises Berechnen von Funktionswerten ermöglichen. Eine dieser Methoden ist die Verwendung einer Potenzreihe.

ZB: Die Werte von e^x können mithilfe der folgenden Potenzreihe ermittelt werden:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \ldots$$

Um e^3 zu berechnen, wird $x = 3$ in diese Reihe eingesetzt: $e^3 = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 3 + \frac{1}{2!} \cdot 3^2 + \frac{1}{3!} \cdot 3^3 + \ldots$

Wie viele Glieder der Reihe zur Berechnung herangezogen werden, hängt von der geforderten Genauigkeit ab. Hier ergibt sich zum Beispiel für sieben Reihenglieder der Wert $e^3 \approx 19{,}4125$.

Da der Wert der einzelnen Reihenglieder von x abhängt, **hängt** auch das **Konvergenzverhalten** bzw. die Summe der Potenzreihe **von x** ab.

ZB: Vergleicht man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $x = 0{,}1$ und $x = 2$, so sieht man:

- $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}1^n = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$
  Die Reihe konvergiert.
- $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$
  Die Reihe divergiert.

Jene Werte von x, für die die Potenzreihe konvergiert, bilden den **Konvergenzbereich** der Reihe. Dieser kann mithilfe des **Quotientenkriteriums** ermittelt werden.

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1} \cdot x^{n+1}}{c_n \cdot x^n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot x\right| < 1$$

- $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot x\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Man bezeichnet $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$ als **Konvergenzradius**. Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < r$.

Die Konvergenz für $|x| = r$ wird anhand der Potenzreihen $P(r)$ bzw. $P(-r)$ entschieden.

Unendliche Reihen

Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Wenn der Grenzwert $r = \lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ existiert, konvergiert die Reihe für $|x| < r$, sie divergiert für $|x| > r$. Für die Randstellen $|x| = r$ kann man nur mithilfe weiterer Untersuchungen Aussagen über das Konvergenzverhalten treffen.

Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ konvergiert, bezeichnet man als Konvergenzbereich der Potenzreihe.

r r
0
Konvergenzbereich

Für Potenzreihen gelten innerhalb des (gemeinsamen) Konvergenzbereichs die gleichen Rechenregeln wie für Polynomfunktionen.

B **2.17** Ermittle den Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Lösung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$c_n = \frac{1}{n}$ und $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ — • c_n und c_{n+1} bestimmen

$$r = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

• Für $-1 < x < 1$ ist die Reihe konvergent.

Überprüfen der Randstellen

$x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$

• Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, $x = -1$ gehört daher zum Konvergenzbereich.

$x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

• Die harmonische Reihe divergiert, $x = 1$ gehört daher nicht zum Konvergenzintervall.

Die Reihe konvergiert im Intervall $[-1; 1[$.

Aufgaben 2.18 – 2.19: Ermittle jeweils den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

B **2.18** **a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$ **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

B **2.19** **a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot x^n$ **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{10^{n+1}}$ **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$ **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

BC **2.20** Die Funktion $y = \ln(x)$ kann durch die Potenzreihe $\ln(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}$ in einem bestimmten Bereich dargestellt werden.

TE

1) Stelle die Funktion $y = \ln(x)$ und die Potenzreihe für n = 7, 8 und 10 in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

2) In welchem Bereich wird die Funktion $y = \ln(x)$ durch die Potenzreihe genähert?

2.3.2 Taylor-Reihen

2.21 Differenziere die Funktion $y = x^5$ so oft, bis die Ableitung erstmals eine konstante Funktion ist. Schreibe diese Konstante mithilfe der Fakultät an.

AB

Im vorigen Abschnitt wurde bereits gezeigt, dass eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzbereichs einer bestimmten Funktion entspricht. Eine Methode zur Ermittlung solcher Potenzreihen stammt von Brook Taylor (englischer Mathematiker, 1685 – 1731) und Colin MacLaurin (schottischer Mathematiker, 1698 – 1746). Dabei werden Funktionen in einem bestimmten Punkt in eine Potenzreihe „entwickelt".

ZB: Die Funktion $y = \cos(x)$ soll ausgehend von $x_0 = 0$ durch eine Polynomfunkion angenähert werden. Die gewählte Stelle x_0 nennt man **Entwicklungsstelle**. Zunächst betrachtet man die Näherung durch die Tangente im Punkt P(0|1). An der Stelle x_0 stimmen der Funktionswert und die erste Ableitung überein. Diese Näherung ist jedoch nur in der unmittelbaren Umgebung der Entwicklungsstelle „brauchbar". Verwendet man für die Näherung eine Funktion 2. Grads, so kann diese so gewählt werden, dass zusätzlich auch die zweite Ableitung, also die Krümmung, an der Stelle x_0 übereinstimmt.

Lineare Funktion **Funktion 2. Grads**

Taylor und MacLaurin bauten diese Idee aus, indem sie Polynome höheren Grads verwendeten, die an der Entwicklungsstelle in allen Ableitungen mit der gegebenen Funktion übereinstimmen. Je höher der Grad des gewählten Polynoms ist, umso größer ist die Anzahl der übereinstimmenden Ableitungen und umso besser nähert die Polynomfunktion die Cosinus-Funktion an.

Funktion 4. Grads **Funktion 8. Grads**

Es lässt sich zeigen, dass eine Potenzreihe, deren Ableitungen mit jenen der ursprünglichen Funktion f an der Stelle x_0 übereinstimmen, gegen die Funktion f konvergiert. Diese Potenzreihe wird **Taylor-Reihe** genannt.

Unendliche Reihen

Die Bestimmung der Koeffizienten der Taylor-Reihe erfolgt nach folgenden Überlegungen:

Eine Funktion f(x) soll durch die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ so angenähert werden, dass an der Stelle x_0 die Funktionswerte und die jeweiligen Ableitungen von f und P übereinstimmen.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) = P(x_0) &\Rightarrow f(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \ldots \\
f'(x_0) = P'(x_0) &\Rightarrow f'(x_0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + \ldots \\
f''(x_0) = P''(x_0) &\Rightarrow f''(x_0) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot x^2 + \ldots \\
f'''(x_0) = P'''(x_0) &\Rightarrow f'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x + \ldots
\end{aligned}
$$

Setzt man die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 + \ldots &\Rightarrow a_0 = f(0) \\
f'(0) &= a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 + 4 \cdot a_4 \cdot 0^3 + \ldots &\Rightarrow a_1 = f'(0) \\
f''(0) &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot a_4 \cdot 0^2 + \ldots &\Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2} \\
f'''(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot 0 + \ldots &\Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3 \cdot 2}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Man erhält dadurch folgende Potenzreihe:

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

Die Potenzreihe P(x) ist innerhalb des Konvergenzbereichs **ident** mit der Funktion f(x). Außerhalb dieses Bereichs divergiert sie, sie ist also nicht einmal eine Näherung der Funktion. Ist die Entwicklungsstelle $x_0 \neq 0$, so wählt man Potenzen von $(x - x_0)$, um wieder ein Gleichungssystem zu erhalten, bei dem jeweils alle Koeffizienten bis auf einen wegfallen.

Taylor-Reihe

Ist eine Funktion f beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in D_f$, so existiert eine Potenzreihe, die in ihrem Konvergenzbereich mit der Funktion f ident ist. Im Konvergenzbereich gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots$$

Diese Potenzreihe nennt man Taylor-Reihe.

Für $x_0 = 0$ gilt: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots$

Bemerkung: Eine Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$ nennt man auch **MacLaurin-Reihe**.

Restglied der Taylor-Reihe

Bricht man die Taylor-Reihe bei n ab, so erhält man ein **Taylor-Polynom** P_n n-ten Grads. Die Summe der nicht berücksichtigten Glieder wird **Restglied** R_n genannt. Es entspricht der Differenz zwischen dem Näherungswert und dem genauen Funktionswert. Das Restglied gibt also den Fehler an, der durch den vorzeitigen Abbruch der Reihe entsteht.
Das Abschätzen der Größe des Restglieds ist im Allgemeinen schwierig, nur für **alternierende konvergente Reihen** liefert das Leibniz-Kriterium eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung des Restglieds.

$|R_n| < \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$ $\left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \ldots \text{erstes weggelassenes Glied} \right)$

Die Entwicklung einer Funktion in eine Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$ wird nun anhand der Funktion $f(x) = e^x$ gezeigt.

$f(x) = e^x$
$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = e^x$
$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1$, usw.

$e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \ldots$

- Die Ableitungen der gegebenen Funktion werden bestimmt und die Werte an der Stelle $x_0 = 0$ berechnet.
- Die Taylor-Reihe wird angeschrieben.

Der Bereich, in dem die Potenzreihe die Funktion darstellt, ergibt sich aus dem **Konvergenzradius der Potenzreihe**.

$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty \Rightarrow$ Die Potenzreihe ist für alle Werte von x konvergent.

Die Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \ldots$ stellt $f(x) = e^x$ für alle reellen Zahlen und auch für alle komplexen Zahlen dar.

Die Abbildung zeigt den Graphen von $y = e^x$ sowie die Graphen der ersten vier Taylor-Polynome.

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = 1 + x$
$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2$
$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3$

Je mehr Glieder der Reihe verwendet werden, desto besser wird die Exponentialfunktion angenähert.

Man erkennt, dass die Taylor-Polynome die Funktion in der Nähe der Entwicklungsstelle besser nähern als weiter davon entfernt. Ebenso ist die Näherung besser, je höher der Grad des Taylor-Polynoms ist.

ZB: $e^{0,5} = 1{,}648721\ldots \to P_3(0{,}5) = \mathbf{1{,}64}58333\ldots \quad P_4(0{,}5) = \mathbf{1{,}648}4375$
$e^{0,9} = 2{,}459603\ldots \to P_3(0{,}9) = \mathbf{2{,}4}265 \quad P_4(0{,}9) = \mathbf{2{,}45}38375$
$e^{1,5} = 4{,}481689\ldots \to P_3(1{,}5) = \mathbf{4{,}}1875 \quad P_4(1{,}5) = \mathbf{4{,}}3984375$

Setzt man in die Taylor-Reihe $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \ldots$ für $x = 1$ ein, erhält man für diese Summe die Euler'sche Zahl.

Darstellung der Euler'schen Zahl

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

BC TE

2.22 **1)** Entwickle die Funktion $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe.
2) Vergleiche für cos(0,6) den Wert des Taylor-Polynoms 4. Grads mit dem vom Taschenrechner angegebenen Wert.
3) Schätze die Größe des Restglieds ab, wenn cos(0,6) mithilfe eines Taylor-Polynoms 4. Grads genähert wird.
4) Ermittle mithilfe des Restglieds, bis zu welchem Grad die Taylor-Reihe ausgerechnet werden muss, um für $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ einen Fehler von maximal 10^{-5} zu erhalten.

Lösung:

1)
$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \sin(x) \Rightarrow f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$

- $f(x) = f^{(4)}(x)$, $f'(x) = f^{(5)}(x)$, usw.
- Koeffizienten der Potenzreihe berechnen

$$\cos(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \ldots =$$
$$= 1 + \cancel{0 \cdot x} - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \cancel{0 \cdot x^3} + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \ldots$$

- Potenzreihe angeben

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \ldots$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

- Koeffizienten allgemein angeben

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} \right| =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} = \lim_{n \to \infty} [(2n+1) \cdot (2n+2)] = \infty$$

- Konvergenzradius berechnen

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Taylor-Reihe angeben

2) TR: cos(0,6) = 0,825335…

$$\cos(0{,}6) \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot 0{,}6^2 + \frac{1}{4!} \cdot 0{,}6^4 = 0{,}8254$$

Der Näherungswert stimmt in den ersten drei Nachkommastellen mit cos(0,6) überein.

3) |Restglied| < |erstes weggelassenes Glied|

$$|\text{Restglied}| < \left| \frac{1}{6!} \cdot 0{,}6^6 \right| = 0{,}0000648$$

4)
$$|a_{2(n+1)}| = \left| \frac{1}{(2n+2)!} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \right| \leq 10^{-5}$$

- erstes weggelassenes Glied

	A	B	C
1	n	Grad	$\lvert a_{2(n+1)} \rvert$
2	0	0	0,308425138
3	1	2	0,015854344
4	2	4	0,000325992
5	3	6	3,59086E-06
6	4	8	2,46114E-08

- Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms wird der Wert des Restglieds berechnet.

Das Taylor-Polynom muss bis zum 6. Grad berechnet werden.

2.23 Entwickle die Funktion f mit $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylor-Reihe. Überprüfe dein Ergebnis. B

Lösung:

$f(x) = x^3,\quad f'(x) = 3x^2,\quad f''(x) = 6x,\quad f'''(x) = 6,\quad f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = 0$

$f(1) = 1,\quad f'(1) = 3,\quad f''(1) = 6,\quad f'''(1) = 6$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \ldots$$

$$x^3 = 1 + 3 \cdot (x - 1) + \frac{6}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{6}{3!} \cdot (x - 1)^3$$

$$x^3 = 1 + 3 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (x - 1)^2 + 1 \cdot (x - 1)^3$$

Probe: $1 + 3x - 3 + 3x^2 - 6x + 3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3$

Im Folgenden sind die **Potenzreihen einiger elementarer Funktionen** sowie spezielle Potenzreihen und deren Konvergenzbereich aufgelistet.

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzbereich
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
a^x mit $a \in \mathbb{R}$	$1 + \frac{\ln(a) \cdot x}{1!} + \frac{(\ln(a))^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{(\ln(a))^3 \cdot x^3}{3!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2 \cdot \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right]$	$\lvert x \rvert < 1$
$\ln(x)$	$(x - 1) - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3 - \frac{1}{4} \cdot (x - 1)^4 + \ldots$	$0 < x \leq 2$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{17 \cdot x^7}{315} + \frac{62 \cdot x^9}{2\,835} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\tanh(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} - \frac{17 \cdot x^7}{315} + \frac{62 \cdot x^9}{2\,835} - \ldots$	$\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	$\lvert x \rvert < 1$

Aufgaben 2.24 – 2.26: Verwende die Reihendarstellung aus der Tabelle.

2.24 Gib das Taylor-Polynom 4. Grads an und berechne damit die Näherungswerte für $f(x_i)$. BC

a) $f(x) = \tan(x)$ für $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = -1$
b) $f(x) = \sin(x)$ für $x_1 = -10$ und $x_2 = 0{,}8$
c) $f(x) = 2^x$ für $x_1 = 0{,}4$ und $x_2 = -2{,}3$
d) $f(x) = \cosh(x)$ für $x_1 = -3$ und $x_2 = 0{,}5$

2.25 ***1)*** Berechne e^x für $x_1 = 1$ und $x_2 = 2{,}7$ mithilfe eines Taylor-Polynoms 5. Grads. BC
2) Vergleiche die Ergebnisse aus ***1)*** mit der Ausgabe des Taschenrechners und beschreibe, was dir auffällt.

2.26 Schreibe die Taylor-Reihe für die gegebene Funktion mithilfe des Summenzeichens an. AB

a) $\sin(x)$
b) $\ln(x)$

Unendliche Reihen

Aufgaben 2.27 – 2.29: Verwende die Reihendarstellung aus der Tabelle auf Seite 25.

B **2.27** Gib mithilfe der Taylor-Reihe für e^x jene für die Funktion f an:

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ **c)** $f(x) = e^{jx}$

B **2.28** Prüfe die angegebene Reihe für **a)** $\frac{1}{1-x}$, **b)** ln(x) durch Entwicklung in eine Taylor-Reihe nach. Überlege zuerst, welchen Wert die Entwicklungsstelle x_0 hat.

BD **2.29** Gib zwei verschiedene Näherungspolynome 3. Grads zur Berechnung von ln(0,75) an. Begründe, warum du damit unterschiedlich gute Näherungswerte erhältst.

BC **2.30** **1)** Entwickle die Funktion f mit f(x) = sin(x) an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.
2) Stelle die Funktion f sowie die Taylor-Polynome 3. Grads und 7. Grads in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Gib jene Bereiche an, in denen dir die jeweilige Näherung geeignet erscheint.
3) Berechne sin(150°) mithilfe der Näherungspolynome aus **2)** und markiere diese Werte in der Grafik. Interpretiere die Ergebnisse.

B **2.31** Entwickle die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ an der Stelle $x_0 = 1$ in eine Taylor-Reihe.

BD **2.32** Entwickle die Funktion $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ an der Stelle $x_0 = 2$ in eine Taylor-Reihe. Begründe, warum die entstehende Taylor-Reihe eine endliche Reihe ist.

BD **2.33** **1)** Zeige, dass das lineare Taylor-Polynom $P_1(x) = 1 + 3 \cdot (x - 1)$ der Tangente an die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle x = 1 entspricht.
2) Zeige, dass das lineare Taylor-Polynom einer Funktion f an der Stelle x_0 der Gleichung der Tangente an die Funktion f an der Stelle x_0 entspricht.

BC **2.34** Entwickle f(x) = sin(x) an den Stellen $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}$ jeweils in eine Taylor-Reihe. Berechne anschließend sin(0,7) mit allen drei Reihen mit dem Näherungspolynom P_4 und interpretiere das Ergebnis.

BD **2.35** Zeige die Gültigkeit der Euler'schen Formel $e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$.

B **2.36** Berechne das Integral näherungsweise mithilfe einer Reihenentwicklung auf vier Dezimalstellen genau. Verwende das Restglied.

a) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ **b)** $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ **c)** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

BC **2.37** **1)** Entwickle $f_1(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und $f_2(x) = \ln(1 + x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe.
2) Berechne ln(1,5) mithilfe der Näherungspolynome P_5. Vergleiche die Ergebnisse.
3) Begründe, warum es nicht möglich ist, f_1 an der Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln.

AB **2.38** Für welchen Winkel ist der relative Fehler kleiner als 0,001, wenn man sin(x) durch x ersetzt?

BD **2.39** Leite die Reihenentwicklung für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ mithilfe einer Polynomdivision her.

BD **2.40** Das Snellius'sche Brechungsgesetz, benannt nach Willebrord van Roijen Snell (niederländischer Astronom, 1580 – 1626) besagt, dass ein Lichtstrahl beim Eintritt aus einem Medium in ein anderes Medium seine Richtung ändert, also der Lichtstrahl gebrochen wird:

$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\delta_2)}$ mit n_i … Brechzahlen, δ_i … Eintritts- bzw. Austrittswinkel

Zeige, dass für kleine Winkel δ_i die Näherung $\frac{n_2}{n_1} \approx \frac{\delta_1}{\delta_2}$ verwendet werden kann.

2.4 Fourier-Reihe

2.4.1 Einleitung

In der Signaltechnik oder bei der digitalen Erzeugung von Tönen treten periodische Funktionen auf, die sich aus stückweise stetigen Funktionen zusammensetzen, zum Beispiel Rechteck- oder Sägezahnfunktionen. Diese Funktionen sollen nun durch Reihen dargestellt werden, deren Glieder Sinus- und Cosinusfunktionen sind.
Mithilfe solcher Darstellungen ist es zum Beispiel möglich, Klänge, die aus einem Grundton und Obertönen bestehen, zu analysieren. In anderer Form wird die Darstellung als Reihe auch zur Datenkomprimierung oder zur Entrauschung von Signalen verwendet.

Da es sich um periodische Funktionen handelt, werden nun einige wichtige Eigenschaften dieser Funktionen und der trigonometrischen Funktionen angegeben bzw. wiederholt.

Darstellung und Eigenschaften periodischer Funktionen

2.41 Gib die Funktionsgleichungen der dargestellten Graphen an. AC

1) (Graph: u über t, linear von 0 bis $\hat{u}$ bei $\frac{T}{2}$)

2) (Graph: y über x, linear von c bei 0 bis 0 bei T)

Viele periodische Funktionen setzen sich aus stückweise stetigen Funktionen zusammen. Meist genügt es, die Funktionsgleichung für eine Periode anzugeben.

ZB: Die dargestellte Dreieckskurve hat die Periode T = 2 und setzt sich in jeder Periode aus zwei linearen Funktionen der Form $y = k \cdot x + d$ zusammen.

Die Funktion wird für eine Periode, zum Beispiel im Bereich [0; 2[, angegeben:
Im Intervall [0; 2[gilt:
$k_1 = 1{,}5$ und $d_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1{,}5x$ … „linke Gerade“
$k_2 = -1{,}5$ und $d_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -1{,}5x + 3$ … „rechte Gerade“

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}5x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -1{,}5x + 3 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Wählt man das Intervall [−1; 1[, so erhält man folgende Darstellung:
$k_1 = -1{,}5$ und $d_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1{,}5x$ … „linke Gerade“
$k_2 = 1{,}5$ und $d_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1{,}5x$ … „rechte Gerade“

$$f(x) = \begin{cases} -1{,}5x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1{,}5x & \text{für } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Unendliche Reihen

Sind periodische Funktionen symmetrisch, so sind Vereinfachungen beim Berechnen von bestimmten Integralen möglich.

Symmetrieeigenschaften von Funktionen

- **Gerade Funktionen**

Der Funktionsgraph ist **symmetrisch zur y-Achse**.
Es gilt: $f(x) = f(-x)$

Der Wert des bestimmten Integrals ist aufgrund der Symmetrie im Bereich $[-\frac{T}{2}; 0]$ und $[0; \frac{T}{2}]$ gleich. Es genügt daher, nur über die halbe Periodenlänge zu integrieren und dann das Ergebnis zu verdoppeln.

$$\int_0^T f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

- **Ungerade Funktionen**

Der Funktionsgraph ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**.
Es gilt: $f(x) = -f(-x)$

Der Wert des bestimmten Integrals ist im Bereich $[-\frac{T}{2}; 0]$ und $[0; \frac{T}{2}]$ gegengleich und somit in der gesamten Periode null.

$$\int_0^T f(x)\,dx = 0$$

- Für die Produkte von geraden bzw. ungeraden Funktionen gilt:

ungerade · ungerade = gerade, da $f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot (-g(-x)) = f(-x) \cdot g(-x)$
gerade · gerade = gerade, da $f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x)$
ungerade · gerade = ungerade, da $f(x) \cdot g(x) = -f(-x) \cdot g(-x)$

Trigonometrische Funktionen

AC **2.42** ***1)*** Skizziere den Graphen der gegebenen Funktion.
2) Beschreibe den Einfluss der Parameter auf die Funktion in Hinblick auf Amplitude und Periode.
a) $y = 2 \cdot \sin(0{,}5x)$ ***b)*** $y = 0{,}5 \cdot \cos(3x)$

Die „bekanntesten" periodischen Funktionen sind die Winkelfunktionen. Die Sinusfunktion $y = \sin(x)$ hat die Periode 2π. Wie aus Band 2, Abschnitt 5.4, bekannt ist, kann eine andere Periodendauer T durch Änderung der Frequenz f erreicht werden. Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ erhält man dann die Sinusschwingung $y = \sin(\omega t)$ mit der Periodendauer T.

$y = \sin(3x)$, $T = \frac{2\pi}{3}$

Für weitere Überlegungen wird das bestimmte Integral von Winkelfunktionen und von Produkten von Winkelfunktionen im Intervall $[0; 2\pi]$ benötigt.

Für die Funktionen $y = \cos(nx)$ und $y = \sin(nx)$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Anschaulich ergibt sich dies, da die orientierten Flächeninhalte zwischen den Nullstellen jeweils gegengleich sind.

$y = \cos(nx)$ $\qquad$ $y = \sin(nx)$

Ebenso ist das bestimmte Integral folgender Produkte von Winkelfunktionen über eine Periode null:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = 0$$

ZB: $y = \sin(2x)\cdot\cos(3x)$ $\qquad$ $y = \sin(2x)\cdot\cos(2x)$ $\qquad$ $y = \cos(2x)\cdot\cos(3x)$

Aufgaben 2.43 – 2.44: Gib jeweils die Periode an und stelle die Gleichung der dargestellten Funktion für eine Periode auf.

2.43 **a)** **b)** **c)** AB

2.44 **a)** **b)** **c)** AB

Rechteckkurve $\qquad$ Trapezkurve $\qquad$ Einweggleichrichtung (Sinus)

2.45 Beschreibe, wie sich die gegebene Funktion von $y = \sin(x)$ unterscheidet. C

a) $y = 3\cdot\sin(x)$ $\qquad$ **c)** $y = \sin(4x)$

b) $y = \sin(x) + 2$ $\qquad$ **d)** $y = 5\cdot\sin(x - 2)$

2.46 **1)** Gib an, ob die Funktion gerade oder ungerade ist. BC

2) Ermittle das bestimmte Integral im Intervall $[0; 2\pi]$.

a) $y = \sin(3x)$ $\qquad$ **b)** $y = \cos(5x)$ $\qquad$ **c)** $y = \sin(4x)\cdot\cos(3x)$

2.4.2 Fourier-Koeffizienten

BCD **2.47** Stelle die Funktionen y_1 und y_2 sowie $y_1 + y_2$ grafisch dar. Erkläre die Entstehung des Graphen von $y_1 + y_2$ und beschreibe die unterschiedlichen Ergebnisse aus ***1)*** und ***2)***.

1) $y_1 = \sin(t)$, $y_2 = 2 \cdot \sin(t)$ ***2)*** $y_1 = \sin(2t)$, $y_2 = 2 \cdot \sin(t)$

Die Überlagerung zweier Schwingungen mit der gleichen Frequenz ergibt wieder eine Schwingung mit dieser Frequenz (vgl. Band 2, Abschnitt 5.4.2). Überlagert man zwei oder mehr **Schwingungen ungleicher Frequenz**, so entsteht im Allgemeinen keine Sinusschwingung, aber immer eine **periodische Funktion**, wenn die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen. Die Periode der entstehenden Überlagerung ist das kleinste gemeinsame Vielfache der einzelnen Perioden.
Durch das Summieren geeigneter Funktionen kann zum Beispiel eine Rechteckkurve entstehen. Die Frequenzen der summierten Schwingungen sind jeweils (ganzzahlige) Vielfache einer Grundfrequenz, die geeigneten Amplituden dieser Schwingungen müssen noch ermittelt werden.
Mithilfe solcher Überlagerungen hat man die Möglichkeit, eine periodische Funktion f als unendliche Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen darzustellen. Diese Summe wird **Fourier-Reihe** (Jean Baptiste Joseph Fourier, französischer Mathematiker, 1768 – 1830) genannt. Dabei muss die Funktion f im Intervall [0; T] in endlich viele Teilintervalle zerlegbar sein, in denen sie monoton und stetig ist, und es muss in den Unstetigkeitsstellen der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren.

Fourier-Reihe
Ist f eine **T-periodische Funktion**, so kann die Funktion f durch eine Reihe folgender Form dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ **Fourier-Koeffizienten**

Ist f eine **2π-periodische Funktion**, so gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$$

Eine periodische Funktion lässt sich also als Summe aus einem **Gleichanteil** $\frac{a_0}{2}$ und Sinus- und Cosinusschwingungen darstellen. Die Kreisfrequenzen dieser Schwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Kreisfrequenz ω_0, die sich aus der Frequenz der Funktion f ergibt.
Die Beträge der Koeffizienten a_n und b_n entsprechen den Amplituden der Sinus- und Cosinusschwingungen. Durch sie ist die Funktion f eindeutig bestimmt. Die Menge aller Koeffizienten wird auch **Spektrum** genannt.
Die „erste" Schwingung $y_1 = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$ wird als **Grundschwingung** (**1. Harmonische**), die weiteren werden als **Oberschwingungen** (**2.**, **3.**, ... **Harmonische**) bezeichnet. Sie spielen zum Beispiel bei Klängen eine Rolle, die sich im Allgemeinen aus einem Grundton und Obertönen zusammensetzen. Die Zerlegung in eine Grundschwingung und Oberschwingungen wird **Fourier-Analyse** genannt.

Für die Darstellung einer Funktion f durch eine unendliche Reihe müssen nun die geeigneten Koeffizienten a_0, a_n und b_n ermittelt werden. Dies wird für 2π-periodische Funktionen gezeigt und gilt mit $x = \omega_0 \cdot t$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ auch für T-periodische Funktionen.

- **Berechnung von a_0:**
  Man geht davon aus, dass für die Funktion eine Reihendarstellung folgender Form existiert:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x) + \ldots$$

Durch Integration der Gleichung im Intervall $[0; 2\pi]$ erhält man:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \underbrace{\int_0^{2\pi} a_1 \cdot \cos(x)\,dx}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_1 \cdot \sin(x)\,dx}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} a_2 \cdot \cos(2x)\,dx}_{0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} b_2 \cdot \sin(2x)\,dx}_{0} + \ldots$$

Mit den Überlegungen von Seite 29 erkennt man, dass alle Integrale mit $a_n \cdot \cos(nx)$ bzw. $b_n \cdot \sin(nx)$ null sind. Daher gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = a_0 \cdot \pi \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

- **Berechnung von a_n und b_n:**
  Um die Koeffizienten a_n bzw. b_n zu erhalten, wird nun jeweils mit einer passenden Funktion multipliziert, sodass nur ein Koeffizient „übrig bleibt". Zur Berechnung von $\mathbf{a_n}$ multipliziert man beide Seiten der Gleichung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$ mit $\cos(mx)$ und integriert anschließend.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\,dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx)\,dx\right)$$

Die Summe auf der rechten Seite enthält nun folgende Integrale:

$m \neq n$: $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\,dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx)\,dx = 0$

$m = n$: $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$, $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(nx)\,dx = 0$

Daraus ergibt sich: $\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos^2(nx)\,dx = a_n \cdot \pi$

Damit erhält man:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$$

Um $\mathbf{b_n}$ zu berechnen, wird die Gleichung mit $\sin(mx)$ multipliziert.
Die Berechnung erfolgt analog, für b_n ergibt sich:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

Für T-periodische Funktionen wird $x = \omega_0 \cdot t$ gesetzt und dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ entspricht wegen $T = 2\pi$ der Ausdruck $\frac{1}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}$.

Fourier-Koeffizienten einer **2π-periodischen** Funktion f(x)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

Fourier-Koeffizienten einer **T-periodischen** Funktion f(t)

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T} f(t)\,dt,\ a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt,\ b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Bemerkungen:

- Oft wird die Periode auch im Bereich $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ angegeben, zB: $a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$

  Es kann auch jedes andere Intervall gewählt werden, das eine volle Periode der Funktion angibt.
- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)\,dt$ ist der Mittelwert der Funktion f(t), er kann oft auch elementar berechnet werden.

ZB: Es soll die Fourier-Reihe der dargestellten periodischen Funktion angegeben werden.

Periode: T = 2π

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ für } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ für } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0\,dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 0 \right) = 2$$

bzw. $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$

- Das bestimmte Integral entspricht dem Flächeninhalt eines Rechtecks, ist also 2π.

Der Gleichanteil $\frac{a_0}{2} = 1$ ist somit der mittlere Funktionswert.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos(nx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0\,dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \sin(nx) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \left(\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) \right) = \frac{4}{n\pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{da } \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$a_1 = \frac{4}{1 \cdot \pi} \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi},\ a_3 = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{3\pi}, \ldots \qquad a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 0$$

Ist der Index n gerade, so ist $a_n = 0$, die ungeraden Indizes ergeben eine alternierende Folge.
Allgemein gilt: $a_{2i} = 0,\ a_{2i-1} = (-1)^{i+1} \cdot \frac{4}{(2i-1) \cdot \pi}$ für $i \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{3p}{2}} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Reihe lässt sich somit folgendermaßen anschreiben:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(1x) + \underbrace{b_1 \cdot \sin(1x)}_{0} + \underbrace{a_2 \cdot \cos(2x)}_{0} + \underbrace{b_2 \cdot \sin(2x)}_{0} + a_3 \cdot \cos(3x) + \underbrace{b_3 \cdot \sin(3x)}_{0} + \ldots$$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3x) + \frac{4}{5\pi} \cdot \cos(5x) \mp \ldots = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(x) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5x) \mp \ldots \right)$$

Wird die Reihe nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abgebrochen, erhält man Näherungsfunktionen, die **trigonometrische Polynome** genannt werden.

Betrachtet man den Graphen der ersten Näherung
$f(x) \approx 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) = y_1$,
so ist dieser eine um 1 in y-Richtung verschobene Cosinuskurve mit der Amplitude $\frac{4}{\pi}$.
Die Grundschwingung ist hier also eine Cosinusfunktion.

Bei Abbruch nach dem dritten Glied erhält man:
$f(x) \approx 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3x)$

Hier wird die Cosinuskurve von der Kurve
$y_2 = -\frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3x)$ überlagert. Diese hat eine kleinere Amplitude und eine höhere Frequenz.

Je mehr Glieder der Reihe man zur Darstellung verwendet, desto geringer ist die Abweichung von der gegebenen Funktion.

Die Näherung für n = 17 ergibt bereits nebenstehendes Bild.

Weiters gilt:

- An den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert. Zum Beispiel verläuft der Graph der Näherungsfunktion durch die Punkte $\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right), \left(\frac{3\pi}{2}\middle|1\right), \ldots$
- Die „Spitzen" an den Unstetigkeitsstellen bleiben erhalten (**Gibbs'sches Phänomen**, nach Josiah Willard Gibbs, amerikanischer Physiker, 1839 – 1903).

Vereinfachungen bei geraden und ungeraden Funktionen

Beim Beispiel von Seite 32 sind die Koeffizienten $\mathbf{b_n = 0}$ und somit fallen die Sinusanteile weg. Dies ist bei allen **geraden** Funktionen der Fall. Ebenso lassen sich die Fourier-Koeffizienten ungerader Funktionen vereinfachen.

Man kann zeigen: Hat die gegebene Funktion die gleichen Symmetrieeigenschaften wie eine Sinuskurve, so enthält sie nur Sinusanteile; hat sie die gleichen Symmetrieeigenschaften wie eine Cosinuskurve, so enthält sie nur Cosinusanteile und $\frac{a_0}{2}$.

- Ist die Funktion f(x) **gerade**, so ist auch das Produkt $f(x) \cdot \cos(nx)$ gerade, da die Cosinusfunktion gerade ist. Die Sinusfunktion ist ungerade und damit auch das Produkt $f(x) \cdot \sin(nx)$. Somit werden alle Koeffizienten b_n der Sinusanteile null.

  Es gilt dann: $a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \;\; a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx, \;\; b_n = 0$

- Ist die Funktion $f(x)$ **ungerade**, so ist auch das Produkt $f(x) \cdot \cos(nx)$ ungerade, das Produkt $f(x) \cdot \sin(nx)$ ist gerade. Somit werden alle Koeffizienten a_n der Cosinusanteile null.

  Es gilt dann: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$

Allgemein gilt für T-periodische Funktionen:

Vereinfachungen der Fourier-Koeffizienten

$f(t)$ ... gerade Funktion: $a_0 = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$, $a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt$, $b_n = 0$

$f(t)$ ... ungerade Funktion: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt$

Bemerkung:
Bei der Wahl der halben Periode ist darauf zu achten, dass jenes Halbintervall verwendet wird, das bei der Symmetrieachse bzw. beim Symmetriezentrum beginnt.

BC TE

GeoGebra, TI-Nspire: www.hpt.at

2.48 ***1)*** Gib an, ob die dargestellte Funktion eine gerade oder ungerade Funktion ist.
2) Berechne die Fourier-Koeffizienten allgemein und gib die ersten fünf Koeffizienten an.
3) Stelle die Fourier-Reihe und die Näherungsfunktion bis zur 5. Harmonischen grafisch dar.

Lösung mit Mathcad:

1) Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung und daher ungerade.

2) Periode: $T := 4$ $\quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ $\quad$ **Funktionsgleichung:** $f_1(t) := t$ $\quad f_2(t) := -t + 2$

Fourier-Koeffizienten:

$a_0 = a_n = 0$

$$b(n) := \frac{4}{T} \cdot \left(\int_0^1 f_1(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)\,dt + \int_1^2 f_2(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)\,dt \right)$$

$$b(n) \rightarrow \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right) - 4 \cdot \sin(\pi \cdot n) + 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)}{\pi^2 \cdot n^2} + \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right) - 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

$b(1) \rightarrow \frac{8}{\pi^2}$ $\quad b(2) \rightarrow 0$ $\quad b(3) \rightarrow -\frac{8}{9 \cdot \pi^2}$ $\quad b(4) \rightarrow 0$ $\quad b(5) \rightarrow \frac{8}{25 \cdot \pi^2}$

3) Fourier-Reihe:

$$fr(t,k) := \sum_{n=1}^{k} \left(b(n) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \right) \qquad f(t) := \begin{cases} t & \text{if } -1 \le t < 1 \\ -t + 2 & \text{if } 1 \le t < 3 \end{cases}$$

$$fr(t,5) \rightarrow \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)}{\pi^2} - \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot t}{2}\right)}{9 \cdot \pi^2} + \frac{8 \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi \cdot t}{2}\right)}{25 \cdot \pi^2}$$

$t := -2, -1.99 .. 4$

f(t)
fr(t, 5)

2.49 Gib an, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt und welche Koeffizienten der Fourier-Reihe daher gleich null sind. C

a) **b)** **c)**

Aufgaben 2.50 – 2.55: Erkläre jeweils, ob und welche Fourier-Koeffizienten der dargestellten Funktion null sind. Berechne jeweils die ersten vier Fourier-Koeffizienten. Gib die Funktion als Fourier-Reihe an. Stelle den Funktionsgraphen und die Näherung grafisch dar. Gib bei den Aufgaben 2.50 und 2.51 die Fourier-Koeffizienten allgemein an.

2.50 **a)** **b)** **c)** ABD

2.51 **a)** **b)** **c)** ABD

2.52 **a)** **b)** **c)** ABD

2.53 **a)** $y = 5 \cdot \sin(x)$ **b)** $y = \cos(x)$ **c)** $y = |\sin(x)|$ ABD

2.54 **a)** **b)** **c)** ABD

2.55 **a)** **b)** **c)** ABD

2.56 **1)** Stelle die stückweise definierte Funktion grafisch dar. AB

2) Gib die Fourier-Reihe der Funktion an, wenn sie periodisch fortgesetzt wird.

a) $f(t) = \begin{cases} (t-2)^2 & \text{für } 0 \leqslant t < 2 \\ 0 & \text{für } 2 \leqslant t < 4 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leqslant t < 3 \\ 4 - t & \text{für } 3 \leqslant t < 4 \end{cases}$

BD **2.57** Gib die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion an.
Zeige anschließend durch Einsetzen von x = 0, dass gilt:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

2.4.3 Amplituden-Phasen-Form und Amplitudenspektrum

AB **2.58** Gib die Aussage „Die Cosinuskurve ist eine um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobene Sinuskurve." als mathematische Gleichung an.

Die Überlagerung von Sinus- und Cossinusschwingungen gleicher Frequenz kann immer als allgemeine Sinusschwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ dargestellt werden. Deshalb kann man die Reihenglieder einer Fourier-Reihe auch in folgender Form darstellen:

$a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) = A_n \cdot \sin(nx + \varphi_n)$

Die Amplitude A_n und der Phasenwinkel φ_n können mithilfe des Zeigerdiagramms ermittelt werden:

Da die Sinuskurve und die Cosinuskurve zueinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind, ergibt sich:

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$

Damit kann die Fourier-Reihe auch wie folgt angeschrieben werden ($x = \omega_0 t$):

Amplituden-Phasen-Form einer Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

mit $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$

Zur Analyse periodischer Funktionen werden die Amplituden betrachtet. Die grafische Darstellung der Amplituden A_n nennt man **Amplitudenspektrum**, jene der Phasenwinkel φ_n **Phasenspektrum**. Bei der Darstellung der Spektren wird auf der waagrechten Achse der Index n, die Kreisfrequenz $\omega = n \cdot \omega_0$ oder die Frequenz f aufgetragen, die zugehörigen Werte werden als Linien darüber eingetragen. Man spricht daher auch von einem **Linienspektrum**. Die „Zeitfunktion" f(t) kann damit als Funktion der Frequenzen dargestellt werden.

ZB: Amplitudenspektrum der Rechteckkurve von Seite 32.
Da die Koeffizienten $b_n = 0$ sind, gilt $A_n = |a_n|$.
$A_0 = \frac{2}{2} = 1$, $A_1 = a_1 = \frac{4}{\pi}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{4}{3\pi}$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{4}{5\pi}$, …
Da $\omega_0 = 1$ ist, ergibt sich das gleiche Bild, wenn die Kreisfrequenz auf der waagrechten Achse aufgetragen wird.
Für die Grundfrequenz gilt $f_0 = \frac{1}{2\pi}$.
Im Amplitudenspektrum kann man aus der Höhe der Amplituden den Einfluss der Oberschwingungen auf die Schwingung erkennen. Für $n \to \infty$ gehen die Amplituden gegen 0.

Ein Maß für den Anteil der Oberschwingungen an der gesamten Schwingung bzw. der Verzerrung ist der **Klirrfaktor** k.

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}} = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}$$

Dieser wird mithilfe der Effektivwerte U_i (mit i = 1, 2, 3, ...) definiert, kann aber auch mithilfe der Amplituden berechnet werden.

B

TE

2.59 Entwickle die gegebene periodische Funktion in eine Fourier-Reihe. Gib dazu die Amplituden und die Phasenwinkel für n = 1, ..., 4 an. Stelle die Funktion, das Fourier-Polynom für n = 4 und das Amplitudenspektrum grafisch dar.

y, 1, 0, 1, 2, 3, 4, t/s

Lösung mit TI-Nspire:

1.1 1.2 1.3 *Fourier-Reihe

©Funktion definieren

$f(t):=t|0\le t\le 1$ Fertig

$g(t):=1|1<t<2$ Fertig

©Fourier-Koeffizienten

$a0:=\frac{2}{2}\cdot\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 g(t)\,dt\right)$ $\frac{3}{2}$

$\frac{2}{2}\cdot\left(\int_0^1 (f(t)\cdot\cos(n\cdot\pi\cdot t))dt+\int_1^2 (g(t)\cdot\cos(n\cdot\pi\cdot t$ ▸

$\frac{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}{n\cdot\pi}+\frac{\cos(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{1}{n^2\cdot\pi^2}$

$\frac{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}{n\cdot\pi}+\frac{\cos(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{1}{n^2\cdot\pi^2}\to a(n)$

Fertig

- Aufgrund des Rechenaufwands ist es besser, das Ergebnis des Integrals zu ...

$\frac{2}{2}\cdot\left(\int_0^1 (f(t)\cdot\sin(n\cdot\pi\cdot t))dt+\int_1^2 (g(t)\cdot\sin(n\cdot\pi$ ▸

$\frac{\sin(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}{n\cdot\pi}$

$\frac{\sin(n\cdot\pi)}{n^2\cdot\pi^2}-\frac{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}{n\cdot\pi}\to b(n)$ Fertig

©Amplituden und Phasenwinkel

$ga(n):=\sqrt{(a(n))^2+(b(n))^2}$ Fertig

$ga(\{1,2,3,4\})$

$\{0.37734, 0.159155, 0.108466, 0.079577\}$

$phi(n):=\tan^{-1}\left(\frac{a(n)}{b(n)}\right)+\pi$ Fertig

$phi(\{1,2,3,4\})$

$\{3.7085, 3.14159, 3.3507, 3.14159\}$

©Fourier-Reihe

$fr(t,k):=\frac{a0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(ga(n)\cdot\sin(n\cdot\pi\cdot t+phi(n)))$

Fertig

$fr(t,4)$

$-\frac{\sqrt{9\cdot\pi^2+4}\cdot\sin\left(3\cdot\pi\cdot t+\tan^{-1}\left(\frac{2}{3\cdot\pi}\right)\right)}{9\cdot\pi^2}-\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{}$ ▸

$\frac{\sin(4\cdot\pi\cdot t)}{4\cdot\pi}-\frac{\sin(2\cdot\pi\cdot t)}{2\cdot\pi}+\frac{3}{4}\to näherung(t)$

Fertig

1.1 1.2 1.3 *Fourier-Reihe

1.3 y, -1, 1, 5, x

- Um auf der x-Achse Vielfache von π zu erhalten, wird der Funktionstyp **Parametrisch** verwendet. Anschließend müssen die **Attribute** geändert werden.

1.1 1.2 1.3 *Fourier-Reihe

$x1(t)=t\cdot\pi$

$y1(t)=ga(t)$

$1\le t\le 4$ tstep=1

(2/3) Graph ist diskret

0.1, -1, 3.14, 13.19

B 2.60 Gib die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion in Amplituden-Phasen-Form an. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar. Berechne den Klirrfaktor.

a) **b)** **c)**

B 2.61 Gib die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion in Amplituden-Phasen-Form an. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

a) **b)** **c)**

2.4.4 Komplexe Form der Fourier-Reihe

Die in der Fourier-Reihe auftretenden Funktionen $\cos(n\omega_0 t)$ bzw. $\sin(n\omega_0 t)$ können durch Anwenden der Euler'schen Formel $e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi)$ auch in komplexer Form angegeben werden.

Es gilt (siehe Aufgabe 2.65): $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi}}{2}$ bzw. $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi}}{2}$ und damit:

$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} + e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2}$ bzw. $\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} - e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2j} = -j\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} - e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2}$

Setzt man dies in die Formel für die Fourier-Reihe ein, so erhält man:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\omega_0 t) + b_n\cdot\sin(n\omega_0 t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} + e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2} - j\cdot b_n\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} - e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2}\right)$$

Für jeweils ein Glied der Summe ergibt sich durch Vereinfachen:

$$a_n\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} + e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2} - j\cdot b_n\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t} - e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2} = e^{j\cdot n\omega_0 t}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}(a_n - j\cdot b_n)}_{c_n} + e^{-j\cdot n\omega_0 t}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}(a_n + j\cdot b_n)}_{c_{-n}}$$

Durch die Festlegung der neuen Koeffizienten c_n ergibt sich eine Summation, die nun auch für negative Werte von n erfolgt.

Für n = 0 erhält man: $\frac{1}{2}(a_0 - j\cdot b_0) + \frac{1}{2}(a_0 + j\cdot b_0) = a_0$, daher ist $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

Mit diesen Zusammenhängen kann die Fourier-Reihe wie folgt dargestellt werden:

Komplexe Form der Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{j\cdot n\omega_0 t} \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T},\ c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - j\cdot b_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j\cdot b_n)$$

ZB: Auf Seite 32 wurden bereits die reellen Fourier-Koeffizienten der dargestellten Rechteckkurve ermittelt.

$b_n = 0,\ a_0 = 2,\ a_1 = \frac{4}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{4}{3\pi},\ a_4 = 0$

Damit ergibt sich für die komplexen Fourier-Koeffizienten:

$c_0 = 1,\ c_1 = \frac{2}{\pi},\ c_3 = -\frac{2}{3\pi}, \ldots \quad c_{-1} = \frac{2}{\pi},\ c_{-3} = -\frac{2}{3\pi}, \ldots$

Für die Reihe erhält man: $f(t) = \ldots - \frac{2}{3\pi}e^{-j\cdot 3t} + \frac{2}{\pi}e^{-j\cdot t} + 1 + \frac{2}{\pi}e^{j\cdot t} - \frac{2}{3\pi}e^{j\cdot 3t} + \ldots$

Um die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt zu ermitteln, geht man von deren Definition aus und setzt die Zusammenhänge zwischen Exponential- und Winkelfunktionen ein:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j\cdot b_n) = \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(t)\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t}+e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2}\,dt - j\cdot\int_0^T f(t)\cdot\frac{e^{j\cdot n\omega_0 t}-e^{-j\cdot n\omega_0 t}}{2j}\,dt\right) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-j\cdot n\omega_0 t}\,dt$$

Geht man analog für c_{-n} vor, so erkennt man, dass die Formel auch für negative Indizes gilt.

Komplexe Fourier-Koeffizienten: $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-j\cdot n\omega_0 t}\,dt \quad n \in \mathbb{Z}$

ZB: $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqslant t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqslant t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\quad T = 2\pi,\ \omega_0 = 1 \quad$ $n = 0$: $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,dt = 1$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-j\cdot n\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot e^{-j\cdot nt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{2}{j\cdot n}\left(e^{-j\cdot n\frac{\pi}{2}} - e^{jn\frac{\pi}{2}}\right)\right) = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\cdot n\frac{\pi}{2}} - e^{-j\cdot n\frac{\pi}{2}}\right)$$

Man berechnet die ersten vier Fourier-Koeffizienten und vergleicht sie mit obigen Ergebnissen.

$c_1 = \frac{1}{j\cdot\pi}\left(e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} - e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{j\cdot\pi}(j - (-j)) = \frac{2}{\pi}$ $\qquad$ $c_3 = \frac{1}{j\cdot 3\pi}\left(e^{j\cdot\frac{3\pi}{2}} - e^{-j\cdot\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1}{j\cdot 3\pi}(-j - j) = -\frac{2}{3\pi}$

$c_2 = \frac{1}{j\cdot 2\pi}\left(e^{j\cdot\pi} - e^{-j\cdot\pi}\right) = \frac{1}{j\cdot 2\pi}(-1 + 1) = 0$ $\qquad$ $c_4 = \frac{1}{j\cdot 4\pi}\left(e^{j\cdot 2\pi} - e^{-j\cdot 2\pi}\right) = \frac{1}{j\cdot 4\pi}(1 - 1) = 0$

Setzt man für n negative Werte ein, erhält man dieselben Ergebnisse.

Auch bei komplexer Darstellung der Fourier-Reihe kann ein Amplitudenspektrum angegeben werden. Dabei werden die Beträge der komplexen Fourier-Koeffizienten aufgetragen. Für die einzelnen Werte gilt: $c_0 = A_0$ und $|c_n| = \frac{1}{2}\cdot A_n$ und $|c_n| = |c_{-n}|$.

Aufgrund der Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten aus den reellen Fourier-Koeffizienten ergibt sich, dass für gerade Funktionen ($b_n = 0$) die Koeffizienten c_n reell sind und für ungerade Funktionen ($a_n = 0$) die Fourier-Koeffizienten c_n rein imaginär sind.

Mithilfe des folgenden Zusammenhangs erhält man die reellen Fourier-Koeffizienten aus den komplexen Fourier-Koeffizienten: $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = j\cdot(c_n - c_{-n})$

2.62 Verwende Aufgabe **2.54 *c)*** und berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten aus den reellen Koeffizienten a_0, a_n und b_n. **B**

2.63 ***1)*** Berechne für die Funktion aus Aufgabe **2.54 *a)*** die komplexen Fourier-Koeffizienten direkt und gib die komplexe Fourier-Reihe an. **B**
2) Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.
3) Berechne die reellen Fourier-Koeffizienten aus den komplexen.

2.64 ***1)*** Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten der dargestellten Kurve direkt. **B**
2) Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

2.65 Zeige, dass gilt: $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ bzw. $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$ **BD**

Unendliche Reihen

Zusammenfassung

Leibniz-Kriterium für **alternierende Reihen**
Eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ ist konvergent, wenn die Folge $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, ... \rangle$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.

Majorantenkriterium für unendliche Reihen mit nicht negativen Gliedern
Für zwei unendliche Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle Glieder gilt:

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Quotientenkriterium

$$g = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Wurzelkriterium

$$g = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ist $g < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $g > 1$, so divergiert die Reihe.
Ist $g = 1$, so ist eine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz nicht möglich.

Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$

Konvergenzradius r einer Potenzreihe $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + ...$

MacLaurin-Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + ...$

Fourier-Reihe

Ist $f(t)$ eine T-periodische Funktion, so lässt sich $f(t)$ in eine Reihe entwickeln.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\,dt,\ a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt,\ b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Bei geraden Funktionen sind die Koeffizienten der Sinusanteile $b_n = 0$, bei ungeraden Funktionen die Koeffizienten der Cosinusanteile $a_n = 0$.

Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad \text{mit } A_0 = \frac{a_0}{2},\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und } \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

Komplexe Form der Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t} \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T},\ c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - j \cdot b_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j \cdot b_n)$$

Komplexe Fourier-Koeffizienten: $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j \cdot n\omega_0 t}\,dt$

Weitere Aufgaben

2.66 David Harold **B**ailey (*1948), Peter **B**orwein (*1953) und Simon **P**louffe (*1956) entdeckten 1996 die so genannte BBP-Formel zur Berechnung von π. — BD

Es gilt: $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$

1) Berechne π näherungsweise für n = 2 und für n = 20.
2) Berechne den absoluten und relativen Fehler der beiden Näherungen verglichen mit der Näherung für π, die dein Taschenrechner angibt.
3) Recherchiere nach weiteren BBP-Reihen zur Berechnung von π. Begründe, welche dieser Reihen deiner Meinung nach am besten zur Berechnung von π geeignet ist.

2.67 **1)** Bestimme die nächsten Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \ldots$. — BD
2) Begründe, warum man die Konvergenz dieser Reihe nicht mit dem Quotientenkriterium zeigen kann.

Potenzreihen

2.68 **1)** Berechne den Konvergenzradius r der Reihe. — BD
2) Zeige das angegebene Verhalten in den Endpunkten des Konvergenzintervalls.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, Konvergenz für x = –r und für x = r

Hinweis: Zeige mittels Partialbruchzerlegung, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ konvergiert.
Verwende diese Reihe als konvergente Majorante.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, Konvergenz für x = –r und Divergenz für x = r

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$, Divergenz für x = –r und Konvergenz für x = r

d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, Divergenz für x = –r und für x = r

2.69 **1)** Berechne den Wert von $\ln\left(\frac{8}{5}\right)$ mithilfe der Taylor-Reihe für $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Verwende das Taylor-Polynom 5. Grads. — AB
2) Berechne den absoluten und den relativen Fehler dieser Näherungen bezogen auf die Näherung, die dein Taschenrechner angibt.

2.70 **1)** Entwickle die Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe. — B
2) Stelle die Funktion und die ersten drei Taylor-Polynome grafisch dar.
a) $f(x) = \sin(\pi - x)$ **b)** $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ **c)** $f(x) = \cosh(x)$

2.71 **1)** Gib die ersten drei Glieder der Taylor-Reihe an der Stelle x_0 an. — B
2) Stelle die Funktion und die ersten drei Taylor-Polynome grafisch dar.
a) $f(x) = \cos^2(x);\ x_0 = \pi$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 5;\ x_0 = -1$ **c)** $f(x) = e^x \cdot \sin(x);\ x_0 = 0{,}5$

2.72 Begründe mithilfe zweier Taylor-Reihen die Gültigkeit der Näherung für kleine Werte von $|x|$: $\sin(x) \approx x \cdot \sqrt[3]{\cos(x)}$ — BD

Fourier-Reihe

CD **2.73** Gib den Gleichanteil $\frac{a_0}{2}$ an, ohne das Integral zu berechnen. Begründe dein Ergebnis.

a) **b)** **c)**

CD **2.74** Erkläre, welche der gegebenen periodischen Funktionen das gleiche Amplitudenspektrum – bis auf A_0 – haben. Begründe, welche Vereinfachungen sich daher beim Berechnen von den Fourier-Reihen ergeben.

a) 1) **2)** **3)**

b) 1) **2)** **3)**

BCD **2.75** **1)** Begründe, ob es sich bei der dargestellten Funktion um eine gerade oder ungerade Funktion handelt. Welche Vereinfachungen können daher getroffen werden?

2) Entwickle die dargestellte Funktion in eine Fourier-Reihe. Gib dazu die ersten vier Fourier-Koeffizienten an.

a) **b)**

B **2.76** **1)** Berechne die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n der dargestellten Funktion.

2) Gib die Amplituden A_n und die Phasen φ_n an.

3) Gib die Fourier-Reihe mithilfe der Fourier-Koeffizienten und in der Amplituden-Phasen-Form an.

4) Stelle die Fourier-Reihe für eine Näherung bis n = 5 sowie das Amplitudenspektrum grafisch dar.

a) **b)**

B **2.77** Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(t) = t^2$, für $-\pi \leqslant t < \pi$, wenn diese periodisch fortgesetzt wird. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

Aufgaben in englischer Sprache

even function	gerade Funktion	power series	Potenzreihe
to expand	erweitern, entwickeln	ratio test	Quotientenkriterium
Fourier series	Fourier-Reihe	remainder	Restglied
odd function	ungerade Funktion	Taylor polynomial	Taylor-Polynom
periodic	periodisch	Taylor series	Taylor-Reihe

2.78 ***1)*** Expand $f(x) = \frac{1}{-x+1} - 1$ about $x_0 = 0$, to get linear, quadratic and cubic approximations. ***2)*** Estimate the remainder if f(x) is approximated by this cubic polynomial for x between 0 and 0.5. ABC

2.79 Find a 5th degree polynomial approximation for e^{-2x} by expanding the function about 0. AB

2.80 Find the Taylor series of $f(x) = x^2 \cdot e^{-3x}$ about $x_0 = -1$. AB

2.81 Find the Fourier series of the 2π-periodic funktion $f(x) = 2x$ for $x \in [0; 2\pi]$. AB

2.82 ***1)*** Explain if the given function is odd or even. ABC
2) Determine the period of the function.
3) Find the Fourier series of the given function.

Wissens-Check

		gelöst
1	Gib jeweils an, ob die Reihe konvergent bzw. divergent ist. A) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} (0{,}2)^n$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	
2	Erkläre, mit welchem Kriterium und unter welchen Voraussetzungen über die Konvergenz von alternierenden Reihen entschieden werden kann.	
3	***1)*** Erkläre, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt. ***2)*** Gib an, welche Fourier-Koeffizienten daher gleich null sind. A) $y = \lvert\sin(x)\rvert$ B)	
4	Ich kann erklären, was eine Amplituden-Phasen-Form ist.	
5	Begründe, ob die beiden gegebenen periodischen Funktionen das gleiche Amplitudenspektrum – bis auf A_0 – haben.	

Lösung:
1) A ist divergent, B ist konvergent, C ist divergent
2) Leibniz-Kriterium; die Folge muss eine monoton fallende Nullfolge sein.
3) A) 1) gerade, 2) $b_n = 0$; B) 1) ungerade, 2) $a_n = 0$
4) siehe Seite 36
5) Ja, sie haben das gleiche Amplitudenspektrum, da die Funktion nur nach unten verschoben wurde.

3 Differentialgleichungen

Bislang wurden Gleichungen behandelt, deren Lösung ein Zahlenwert ist. In der Natur begegnen uns Vorgänge, bei denen Funktionen und deren Änderungsraten eine große Rolle spielen, wie zum Beispiel Beschleunigungen, gleichmäßiges Vermischen von Flüssigkeiten oder der radioaktive Zerfall. Beschreibt man solche Vorgänge in Form von Gleichungen, entstehen Differentialgleichungen. Die Lösungen von Differentialgleichungen sind keine Zahlen, sondern Funktionen.

3.1 Grundlagen und Grundbegriffe

A **3.1** In jedem Punkt P(x|y) einer Kurve gilt für die Steigung $k = 2x$. Schreibe diesen Zusammenhang mithilfe der ersten Ableitung an.

AC **3.2** Gib jeweils eine Funktion y an, die die angegebene Gleichung erfüllt. Beschreibe deine Überlegungen.

1) $y' = x$ ***2)*** $y' = y$

Differentialgleichungen beschreiben den **Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen**.

Die Gleichung $y' = 2$ beschreibt alle linearen Funktionen mit der Steigung 2, also $y = 2x + C$. Die Lösungsfunktion kann durch Integration ermittelt werden. Bei anderen Gleichungen wie zum Beispiel $y'' + 3y' + 2y = 5$ oder $4 \cdot \frac{dy}{dt} - y = 0$ sind andere Methoden zur Ermittlung der Lösung notwendig.

Im Folgenden wird anhand einer einfachen Aufgabe die Vorgehensweise beim Aufstellen und Lösen von Differentialgleichungen vorgestellt.

Füllt man in ein Gefäß mit der Masse m_0 eine Flüssigkeit, so nimmt die Gesamtmasse m des Gefäßes inklusive Flüssigkeit mit steigendem Flüssigkeitsvolumen V stetig zu. Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht ist bekannt, dass die konstante Änderungsrate der Masse in Abhängigkeit vom Volumen der Flüssigkeitsdichte ρ entspricht. Um die Gesamtmasse m in Abhängigkeit vom Flüssigkeitsvolumen V als Funktion beschreiben zu können, wird die Änderungsrate in Differentialschreibweise angegeben:

$$\frac{dm}{dV} = \rho$$

Durch unbestimmte Integration nach V erhält man:

$$m(V) = \int \rho \, dV = \rho \cdot V + C$$

Da $m(0) = m_0$ ist, entspricht die Integrationskonstante C der Masse m_0 des leeren Gefäßes.
Man erhält die Funktion der momentanen Gesamtmasse m in Abhängigkeit vom Flüssigkeitsvolumen V:

$$m(V) = \rho \cdot V + m_0$$

Anhand dieses Beispiels erkennt man, dass die Gleichung einer Funktion ermittelt werden kann, wenn ein Zusammenhang zwischen der Funktion und ihrer Ableitung bekannt ist.

Gleichungen, die einen Zusammenhang zwischen einer unbekannten Funktion und ihren Ableitungen herstellen, bezeichnet man als **Differentialgleichungen**.

Differentialgleichungen entstehen oft durch das Übersetzen naturwissenschaftlicher Zusammenhänge in mathematische Schreibweise.

Beim **radioaktiven Zerfall** werden instabile Atomkerne spontan in andere Atomkerne umgewandelt. Dabei wird Strahlung ausgesendet. Aufgrund von Beobachtungen und weiteren Überlegungen hat man herausgefunden, dass die momentane Änderungsrate, mit der eine Menge an radioaktivem Material zerfällt, direkt proportional zur Menge des momentan vorhandenen Materials N ist. Dabei ist die so genannte Zerfallskonstante λ der zugehörige Proportionalitätsfaktor.
Um eine Funktion zu ermitteln, die die Menge an radioaktivem Material zu jedem beliebigen Zeitpunkt angibt, muss zuerst eine Differentialgleichung aufgestellt werden.

$N(t)$ … Menge an radioaktivem Material zum Zeitpunkt t

$\frac{dN}{dt}$ … zeitliche Änderungsrate der Menge an radioaktivem Material

$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N(t)$ ● Die Änderungsrate ist direkt proportional zur momentanen Menge. Da es sich um einen Zerfallsprozess handelt, wird der Proportionalitätsfaktor λ mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Bei der Funktion, die den radioaktiven Zerfall beschreibt, handelt es sich um eine Exponentialfunktion (siehe Band 2, Abschnitt 4). In Abschnitt 3.2.2 werden Methoden zum Ermitteln der Lösungsfunktionen vorgestellt.

Da die Art der Differentialgleichung einen Einfluss auf die jeweilige Lösungsmethode hat, werden Differentialgleichungen nach verschiedenen Kriterien klassifiziert:

- Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die **Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung**.
  ZB: Die Gleichung $y'' - 5y' + 3y = 0$ ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.
- Der **Grad** einer Differentialgleichung ist der **Exponent der höchsten Ableitung**.
  ZB: Die Gleichung $(y'')^3 + (y')^2 = 4$ ist eine Differentialgleichung 3. Grads und 2. Ordnung.
- **Lineare Differentialgleichungen** sind Gleichungen, bei denen die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz auftreten. Es treten nur lineare Terme von y, y', y'', usw. auf, also auch keine Produkte aus der Funktion und ihren Ableitungen.
  Andernfalls handelt es sich um **nichtlineare Differentialgleichungen**.
  ZB: Lineare Differentialgleichung: $y' + 3y = 0$ oder $2y'' + x \cdot y = \sin(x)$
  Nichtlineare Differentialgleichung: $y \cdot y' = -x$ oder $(y')^2 - 2y' = \ln(x)$
- Differentialgleichungen, die nach der höchsten Ableitung aufgelöst sind, bezeichnet man als **explizite Differentialgleichungen**, andernfalls bezeichnet man sie als **implizite Differentialgleichungen**.
  ZB: Explizit: $y'' = 2y + 5$
  Implizit: $y'' - 2y = 5$
- Hängt eine Differentialgleichung nur von einer einzigen Variablen ab, bezeichnet man sie als **gewöhnliche Differentialgleichung**.

Differentialgleichungen

Anhand eines weiteren Beispiels werden nun einige Grundbegriffe erklärt.

Es soll die Differentialgleichung $y' = -x + 1$ gelöst werden. Die Lösungsfunktion y soll an der Stelle $x = 0$ den Wert $y = 1$ haben.

- Durch unbestimmte Integration kann die Lösungsfunktion y ermittelt werden:

  $y(x) = \int(-x + 1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + x + C$

  Für die Integrationskonstante C kann jeder beliebige Wert eingesetzt werden. Man erhält daher unendlich viele Kurven, die sich nur um den Parameter C voneinander unterscheiden. In diesem Fall entspricht dies einer Verschiebung entlang der y-Achse. Die Menge dieser Kurven bezeichnet man als **Kurvenschar**. Diese Kurvenschar ist die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung.

- Aus der Angabe geht hervor, dass die Lösungskurve durch den Punkt **P(0|1)** verlaufen soll. Setzt man diese Bedingung in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ein, so kann man den Parameter C eindeutig bestimmen und erhält damit eine **spezielle** (**partikuläre**) **Lösung** der Differentialgleichung:

  $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -0^2 + 0 + C \Rightarrow C = 1$

  Die spezielle Lösung der Differentialgleichung lautet: $y(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 1$

Beim Lösen einer Differentialgleichung treten Integrationskonstanten auf, deren Anzahl der Ordnung der Differentialgleichung entspricht. Die Ermittlung einer speziellen Lösung einer Differentialgleichung ist nur dann möglich, wenn die Anzahl von zusätzlichen Informationen mit der Anzahl der Parameter übereinstimmt.

Man unterscheidet zwischen zwei verschiedenen Arten von Bedingungen:

- Betreffen alle Informationen die selbe Stelle x_0, so spricht man von **Anfangsbedingungen**: $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ usw.
  Bei Weg-Zeit-Funktionen entspricht dies zumeist der Anfangsposition y_0 bzw. der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (zB: $y(0\,s) = 2\,m$ bzw. $y'(0\,s) = 4\,\frac{m}{s}$).
  Man bezeichnet Differentialgleichungen mit angegebenen Anfangsbedingungen als **Anfangswertaufgaben** bzw. als **Anfangswertprobleme**. Die Stelle x_0 muss dabei nicht dem „Anfang" des beschriebenen Vorgangs entsprechen.

- Durch **Randbedingungen** sind Werte angegeben, die an unterschiedlichen Stellen x_n gelten: $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y'(x_3)$, usw.
  Im Gegensatz zu Anfangswertaufgaben sind solche **Randwertaufgaben** bzw. **Randwertprobleme** allerdings nicht immer lösbar.

Die **Lösung einer Differentialgleichung** n-ter Ordnung sind Funktionen, die sich um n Parameter voneinander unterscheiden. Diese **Funktionenschar** wird **allgemeine Lösung** genannt. Durch **Anfangs-** oder **Randbedingungen** wird eine bestimmte Funktion festgelegt, die man als **spezielle Lösung** bezeichnet.

Senkrechter Wurf ohne Luftwiderstand

Der Legende nach hat Isaac Newton das Kraftgesetz $F = m \cdot a$ anhand der Beobachtung eines fallenden Apfels postuliert. Wird ein Körper mit der Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einer Höhe h_0 senkrecht nach oben geworfen, wirkt die Gravitationskraft $F_G = m \cdot g$ auf ihn.

Zur Ermittlung der momentanen Position y des Körpers zu jedem beliebigen Zeitpunkt t lässt sich folgende Differentialgleichung aufstellen und lösen:

- Es gilt die Gleichgewichtsbedingung $F = -F_G$. Da die Gravitationskraft der Bewegung entgegenwirkt, muss F_G mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Die Beschleunigung ist die 2. Ableitung der Fallhöhe y nach der Zeit: $a = \ddot{y}$

  $$F = -F_G \;\Rightarrow\; m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g \;\Rightarrow\; \ddot{y} = -g$$

  Durch unbestimmtes Integrieren erhält man die Funktion $\dot{y}$, die die Momentangeschwindigkeit angibt:
  $$\dot{y} = \int(-g)\,dt = -g \cdot t + C_1$$

- Zur Bestimmung der momentanen Höhe y muss die Funktion $\dot{y}$ erneut unbestimmt integriert werden. Für die **allgemeine Lösung** erhält man somit:

  $$y(t) = \int(-g \cdot t + C_1)\,dt = -\tfrac{g}{2} \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

- Setzt man die **Anfangsbedingungen** $\dot{y}(0) = v_0$ und $y(0) = h_0$ in die allgemeine Lösung ein, erhält man die Werte für C_1 und C_2:

  $$\dot{y}(0) = v_0 \;\Rightarrow\; v_0 = -g \cdot 0 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = v_0$$
  $$y(0) = h_0 \;\Rightarrow\; h_0 = -\tfrac{g}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = h_0$$

Die spezielle Lösung für die momentane Höhe y bei einem senkrechten Wurf aus einer Höhe h_0 mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 lautet:

$$y(t) = -\tfrac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$

3.3 Ermittle die spezielle Lösung y der Differentialgleichung $y'' = 0{,}12 \cdot x^2$ mit den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y(1) = 2{,}03$.

B

Lösung:

$$y' = \int 0{,}12 \cdot x^2\,dx = 0{,}04 \cdot x^3 + C_1$$
$$y = \int(0{,}04 \cdot x^3 + C_1)\,dx = 0{,}01 \cdot x^4 + C_1 \cdot x + C_2$$

- Zweimaliges Integrieren, da es sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt.

Allgemeine Lösung: $y = 0{,}01 \cdot x^4 + C_1 \cdot x + C_2$

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \;&\Rightarrow\; \text{I: } C_2 = 1 \\ y(1) = 2{,}03 \;&\Rightarrow\; \text{II: } 0{,}01 + C_1 + C_2 = 2{,}03 \\ & \quad 0{,}01 + C_1 + 1 = 2{,}03 \\ & \quad C_1 = 1{,}02 \end{aligned}$$

- Einsetzen der Bedingungen führt auf ein lineares Gleichungssystem.

Spezielle Lösung: $y = 0{,}01x^4 + 1{,}02x + 1$

Differentialgleichungen

C **3.4** Trage den Grad und die Ordnung der Differentialgleichung in die Tabelle ein.

Gleichung	Grad	Ordnung	Gleichung	Grad	Ordnung
$y' - 2y = 0$			$(y'')^2 + 3y = 0$		
$\frac{d^2y}{dx^2} + 6 \cdot \frac{dy}{dx} + 2y = 0$			$\ddot{x}^3 + 4\dot{x} = \sin(t)$		

Aufgaben 3.5 – 3.7: Stelle jeweils den gegebenen Zusammenhang als Differentialgleichung dar.

A **3.5** **a)** Die Änderungsrate der Menge an Kartoffelchips bei einem Fußballabend ist direkt proportional zur momentan vorhandenen Menge.
b) Die Geschwindigkeit, mit der Alex beim Shoppen das Geld ausgibt, ist direkt proportional zum momentanen Kontostand.
c) Das Volumen eines Germteigs nimmt mit der Zeit in einem Ausmaß zu, das proportional zum jeweils vorhandenen Volumen ist.

A **3.6** **a)** Beim freien Fall ohne Luftwiderstand ist die Änderung der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Höhe h indirekt proportional zur Wurzel aus der Höhe.
b) Wird eine Wachsschicht der Dicke d gleichmäßig erwärmt, so ist die Änderung der Dicke mit der Zeit direkt proportional zur momentanen Wachsdicke.
c) Die Änderung des Dampfdrucks p mit der Temperatur T ist für eine bestimmte Substanz direkt proportional zum Dampfdruck und indirekt proportional zum Quadrat der Temperatur.

A **3.7** Die Steigung der Tangente an eine Funktion ist in jedem Punkt $P(x|y)$
a) gleich dem Quadrat der x-Koordinate.
b) gleich der dritten Wurzel aus der x-Koordinate.
c) gleich der Summe aus der x- und der y-Koordinate.
d) gleich dem Kehrwert des Produkts aus der x- und der y-Koordinate.

AC **3.8** Bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung sind zusätzliche Informationen vorhanden. Gib an, ob es sich bei diesen Informationen um Anfangs- oder Randbedingungen handelt und stelle sie in Funktionsschreibweise dar.
A) Bei einer Eintauchtiefe von 3 cm wird ein Flüssigkeitsdruck von 900,7 hPa gemessen, bei 4 cm Eintauchtiefe beträgt der Druck 901,1 hPa.
B) 10 s nach dem Start des Rennens hat der Fahrer eine Strecke von 200 m zurückgelegt und seine Momentangeschwindigkeit beträgt 55,3 $\frac{m}{s}$.
C) Um 8:00 Uhr betrug die Temperatur 15 °C, um 13:00 Uhr wurde eine Temperatur von 32 °C gemessen.

C **3.9** Gib an, ob die angegebene Differentialgleichung durch Integration lösbar ist und wie oft gegebenenfalls integriert werden muss.

1) $\frac{d^2x}{dt^2} = 0{,}5 \cdot t$
2) $m \cdot y'' + b \cdot y' + k \cdot y = 0$
3) $y'' = 3x^2 - 2x + 1$
4) $y' = 3y - 2$

BD TE **3.10** Stelle die Funktion f für C = –1, C = 0, C = 1 und C = 2 grafisch dar. Erkläre jeweils, welchen Einfluss der Parameter C auf den Funktionsgraphen hat.
1) $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}8x + C$ **2)** $f(x) = 2 \cdot (x + C) - 1$ **3)** $f(x) = C \cdot e^{-0{,}5x}$

3.11 Erkläre jeweils, wie viele Anfangsbedingungen nötig sind, um eine spezielle Lösung der angegebenen Differentialgleichung zu ermitteln. **D**

1) $y' + 3y = 0$ **3)** $y' = y''' - 2y'' + 3x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ **4)** $y = y'' + y'$

Aufgaben 3.12 – 3.13: Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

3.12 **a)** $y'' = -3x + 2$ **b)** $y' = 4x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ **c)** $y'' = 5x + \sqrt[3]{x}$ **B**

3.13 **a)** $y'' = -2 \cdot \sin(3x)$ **b)** $y' = 4 \cdot \ln(x + 3)$ **c)** $y'' = 0{,}5 \cdot e^{-x} + 2$ **B**

Aufgaben 3.14 – 3.16: Ermittle jeweils die spezielle Lösung der Differentialgleichung mithilfe der angegebenen Bedingungen.

3.14 **a)** $y' = 0{,}25x^2 + 1;\ \ y(2) = 1$ **b)** $y' = 2 \cdot \sin(x);\ \ y(0) = \pi$ **B**

3.15 **a)** $y'' = \sqrt{x};\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 16$ **b)** $y'' = -0{,}6x + 0{,}5;\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0{,}1$ **B**

3.16 **a)** $y' = -\frac{1}{x^2} + e^{2x};\ \ y(1) = 2$ **b)** $y'' = 2 \cdot \sqrt{x} + 4x^3 - 1;\ \ y(0) = 4,\ \ y'(1) = -\frac{1}{3}$ **B**

3.17 Die Bewegung eines Körpers wird durch folgende Differentialgleichungen beschrieben: **AB**
Beschleunigung $\frac{d^2s}{dt^2} = a$ ... konstant. Ermittle die spezielle Lösung für die Funktion des zurückgelegten Wegs s mithilfe der Anfangsbedingungen $v_0 = v(0)$ und $s_0 = s(0)$.

a) $a = 0{,}5\,\frac{m}{s^2};\ \ v_0 = 1\,\frac{m}{s},\ \ s_0 = 2\text{ m}$ **b)** $a = 0\,\frac{m}{s^2};\ \ v_0 = 15\,\frac{m}{s},\ \ s_0 = 120\text{ m}$

3.18 Ein Hochgeschwindigkeitszug fährt auf einer schnurgeraden Strecke mit einer Geschwindigkeit von 225 $\frac{km}{h}$. Der Triebfahrzeugführer erkennt auf den Schienen ein Hindernis und leitet zum Zeitpunkt t = 0 s eine Vollbremsung mit einer Verzögerung von $a = 0{,}98\,\frac{m}{s^2}$ ein. **ABD**

1) Stelle die Differentialgleichung für den Bremsweg auf.
Hinweis: Da eine Verzögerung einer „negativen Beschleunigung" entspricht, muss im Ansatz die Verzögerung a mit einem negativen Vorzeichen versehen werden.

2) Berechne, nach welcher Zeit der Hochgeschwindigkeitszug zum Stillstand kommt.

3) Das Hindernis befindet sich am Beginn des Bremsvorgangs in einer Entfernung von 2,2 km zum Zug. Argumentiere anhand einer Rechnung, ob der Hochgeschwindigkeitszug vor dem Hindernis anhalten kann.

3.19 Thomas spielt mit seinen Freunden im Hof seiner Wohnhausanlage Fußball, danach wollen sie Eis essen gehen. Da Thomas weder den Ball mitnehmen, noch die Stiegen zur Wohnung im zweiten Stockwerk hinaufsteigen will, möchte er den Ball seiner Schwester Marlies zuwerfen, die am Fenster steht und den Fußball fangen soll. **ABD**

1) Stelle die Differentialgleichung für die momentane Wurfhöhe y auf, wenn Thomas den Ball zum Zeitpunkt t = 0 s senkrecht mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vom Boden aus nach oben wirft.
Hinweis: Es gilt das Wechselwirkungsgesetz $F = -F_G$ bzw. $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -m \cdot g$.

2) Thomas wirft den Ball mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 11 $\frac{m}{s}$ vom Boden aus senkrecht nach oben. Erkläre anhand einer Rechnung, ob dies für Marlies ausreicht, um den Ball in einer Höhe von 7 m fangen zu können.

3.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

3.2.1 Grafische Veranschaulichung – Richtungsfelder

C **3.20** Überlege und beschreibe, welche Phänomene durch die angegebenen Grafiken dargestellt werden.

A) S N

B)

Weht Wind über ein Getreidefeld, kann man die verschiedenen Luftströmungen anhand der wogenden Ähren beobachten. In Naturwissenschaft und Technik wird der Begriff des Felds verwendet, um Phänomene wie Elektromagnetismus oder Gravitation zu beschreiben. Die grafische Darstellung erfolgt mithilfe von so genannten **Feldlinien**.

ZB: Es sollen die Lösungskurven der Differentialgleichung $y' = e^x$ für verschiedene Punkte aus der xy-Koordinatenebene grafisch veranschaulicht werden. Dabei wird jedem Punkt $P(x|y)$ durch die Gleichung $y' = e^x$ eine Steigung zugeordnet, die man durch kurze Tangentenstücke andeutet. Dieses Tangentenstück bildet gemeinsam mit dem zugehörigen Punkt ein **Linienelement**.

$P(0|1)$: $y' = e^0 = 1$, $Q(0|2)$: $y' = e^0 = 1$,
$R(0{,}5|1)$: $y' = e^{0{,}5} = 1{,}648...$, $S(1|1)$: $y' = e^1 = 2{,}718...$, usw.

Zeichnet man die Linienelemente in eine Zeichenebene ein, entsteht ein **Richtungsfeld**. Um eine Vorstellung von einer speziellen Lösungskurve zu erhalten, „passt" man eine Kurve in die Tangentenstücke ein. In diesem Beispiel entsprechen diese Lösungskurven den Graphen von Exponentialfunktionen.

Mitunter kann es beim Anfertigen von Richtungsfeldern hilfreich sein, dass man so genannte **Isoklinen** verwendet. Darunter versteht man Linien, auf denen Punkte mit gleicher Steigung liegen.

Stellt man zum Beispiel das Richtungsfeld der Gleichung $y' = -\frac{x}{y}$ dar, so sind die Isoklinen Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen. Legt man Kurven an die Tangentenstücke, ergeben sich konzentrische Kreise.

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung ordnet jedem Punkt der Zeichenebene eine Steigung zu. Dadurch wird die Ebene zu einem **Richtungsfeld**. Ein Punkt und das zugehörige Tangentenstück werden als **Linienelement** bezeichnet.

3.21 Stelle das Richtungsfeld der Differentialgleichung $2y' + y - 3 = 0$ für beliebige Punkte aus dem Intervall $y \in [0; 5{,}5]$ dar. Beschreibe deine Vorgehensweise.

BC

Lösung:

$2y' + y - 3 = 0$ Umformen der Gleichung auf die explizite Form führt auf y!

$y' = \frac{3-y}{2}$ Zur Berechnung der Steigung für einzelne Werte kann man eine Wertetabelle anfertigen.

y	y′
0	1,5
0,5	1,25
1	1
1,5	0,75
2	0,5
2,5	0,25
3	0
3,5	−0,25
4	−0,5
4,5	−0,75
5	−1
5,5	−1,25

Die Steigung hängt nur von y ab, daher liegen alle Linienelemente mit gleicher Steigung auf Geraden y = C, die parallel zur x-Achse liegen. Daher können die Isoklinen y = 0,5; y = 1; usw. in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Nun kann man die entsprechenden Linienelemente einzeichnen und erhält damit das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

Technologieeinsatz: Richtungsfelder
TI-Nspire

TE

ZB: Es soll das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x - 2y$ sowie die spezielle Lösungskurve, die durch den Punkt P(0|1) verläuft, dargestellt werden.

Dazu wählt man in der **Graphs**-Applikation im Menü **3: Graph-Eingabe/Bearbeitung**, **7: Differentialgleichung**.

Es erscheint ein Fenster, in dem die Gleichung eingegeben wird. Da mehrere Gleichungen eingegeben werden können, werden die Funktionen in der Eingabezeile durchnummeriert:

y1′=x-2y1

Um die spezielle Lösung einzuzeichnen, gibt man den Punkt P an, durch den die Kurve verlaufen soll, **$(x_0|y1_0)$: (0,1)**

Um weitere spezielle Lösungen einzuzeichnen, zum Beispiel durch Q(0|−4), klickt man das Symbol neben den Punktkoordinaten an, wodurch sich ein weiteres Eingabefenster öffnet, in dem weitere Anfangsbedingungen eingegeben werden können.

Differentialgleichungen

TE

GeoGebra

ZB: Die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ soll mithilfe eines Richtungsfelds grafisch veranschaulicht werden. Es soll auch jene Lösungskurve eingezeichnet werden, die durch den Punkt P(0|1) verläuft.

Das Richtungsfeld r wird mithilfe des Befehls **r=Richtungsfeld[x/y]** erzeugt.

Um die spezielle Lösungskurve durch den Punkt P(0|1) einzuzeichnen, definiert man **P=(0,1)** und verwendet dann den Befehl **Ortslinie[r,P]**.

Es erscheint ein Ast einer Hyperbel. Um den zweiten Ast der Hyperbel zu zeichnen, kann man den symmetrisch zur x-Achse gelegenen Punkt Q(0|–1) definieren und wie bei der Kurve durch P verfahren:

Q=(0,-1)

Ortslinie[r,Q]

AC **3.22** Die Abbildung zeigt das Richtungsfeld einer Differentialgleichung. Ordne dem Richtungsfeld den Funktionstyp der speziellen Lösung zu, die durch den Punkt P verläuft und zeichne die spezielle Lösung ein.

a)

A) Logarithmusfunktion
B) Quadratische Funktion

b)

A) Exponentialfunktion
B) Gebrochen rationale Funktion

TE

Aufgaben 3.23 – 3.24: Stelle das Richtungsfeld der Differentialgleichung grafisch dar. Zeichne die spezielle Lösung zur angegebenen Bedingung ein.

B **3.23** **a)** $y' = 0{,}5x$; $y(0) = 1$ **b)** $y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$; $y(1) = 0$ **c)** $y' = -2 \cdot e^{-x}$; $y(0) = 2$

B **3.24** **a)** $3y' + y^2 = 1$; $y(0) = 1$ **b)** $4y' + 3 = 2y$; $y(0) = 0$ **c)** $(y')^2 - 2y = 6$; $y(0) = 1$

BC **3.25** Stelle das Richtungsfeld der Differentialgleichung sowie die speziellen Lösungen zu den beiden Anfangsbedingungen grafisch dar. Beschreibe den unterschiedlichen Verlauf der Kurven mit eigenen Worten.

TE

a) $y' = -\frac{2x}{3y}$; $y(0) = 2$ und $y(0) = 4$
b) $y' = y - x$; $y(0) = 1$ und $y(2) = 0$
c) $y' = x \cdot y^2$; $y(0) = -2$ und $y(0) = 1$
d) $y' = e^y \cdot \sin(x)$; $y(0) = -1$ und $y(0) = 1$

3.2.2 Trennen der Variablen

3.26 Bilde die erste Ableitung der Funktion $y = e^{x^2}$ und beschreibe, welche Regel du dafür anwenden musst. Erkläre, warum das Ergebnis auch in der Schreibweise $y' = 2x \cdot y$ angegeben werden kann. BD

3.27 Gegeben ist die Funktion $g(y) = e^y$ mit $y = x^2$. Argumentiere, warum $\int \frac{y'}{g(y)}\,dx$ eine Stammfunktion hat, und ermittle diese. BD

Hat eine Differentialgleichung 1. Ordnung die Form $y' = f(x) \cdot g(y)$, so kann deren Lösung mittels **Trennen der Variablen** bestimmt werden. Dabei beschreibt $g(y)$ eine Funktion von y mit $y = y(x)$. Die Funktion $g(y)$ ist abhängig von y, wie zum Beispiel:

$$y' = \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{g(y)}; \quad y(x) = ?$$

Die Lösungsmethode wird anhand einer konkreten Differentialgleichung gezeigt.

Es soll die Differentialgleichung $y' - 3x^2 \cdot y = 0$ mit $y(0) = 4$ gelöst werden.

$y' = 3x^2 \cdot y$
- y' explizit angeben, die Gleichung hat die Form $y' = f(x) \cdot g(y)$.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot y$
- Anschreiben von y' als Differentialquotient

$\frac{1}{y}\,dy = 3x^2\,dx$
- **Trennen der Variablen**: Es wird so umgeformt, dass y und dy auf einer Seite der Gleichung stehen, x und dx auf der anderen. Die Differentiale dy und dx dürfen nicht im Nenner eines Bruchs stehen.

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 3x^2\,dx$
- Auf beiden Seiten wird nach der jeweiligen Variablen integriert. Bemerkung: Tatsächlich wird auf beiden Seiten nach x integriert, da y eine Funktion von x ist und $y' = \frac{dy}{dx}$ gilt.

$\ln|y| + C_1 = x^3 + C_2$
$\ln|y| = x^3 + \bar{C}$
- Die Integrationskonstanten können zu einer neuen Konstanten $\bar{C}$ zusammengefasst werden: $C_2 - C_1 = \bar{C}$ … konstant. Daher wird die Integrationskonstante oft nur auf der rechten Seite der Gleichung addiert.

$|y| = e^{x^3 + \bar{C}}$
- Entlogarithmieren

$|y| = e^{x^3} \cdot e^{\bar{C}}$
- Durch Anwenden der Rechenregeln für Potenzen ergibt sich die Konstante $e^{\bar{C}}$. Die Betragstriche von y können weggelassen werden, für $\pm e^{\bar{C}}$ wird kurz C geschrieben.

$y = C \cdot e^{x^3}$
- **Allgemeine Lösung**

$y(0) = 4 \Rightarrow C = 4$
- Ermitteln von C durch Einsetzen der Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung

$y = 4 \cdot e^{x^3}$
- **Spezielle Lösung**

Differentialgleichungen der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $g(y) \neq 0$ können durch **Trennen der Variablen** gelöst werden.

Differentialgleichungen

B **3.28** Löse die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{2x}$ mittels Trennen der Variablen.

Lösung:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$	• Anschreiben von y' als Differentialquotient
$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2x}\,dx$	• Trennen der Variablen
$\ln\lvert y\rvert = \frac{1}{2} \cdot \ln\lvert x\rvert + \bar{C}$	• Beidseitiges Integrieren
$\ln\lvert y\rvert = \ln\lvert x^{\frac{1}{2}}\rvert + \ln\lvert C\rvert$	• Ersetzen von $\bar{C}$ durch die Konstante $\ln\lvert C\rvert$ und Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen
$\ln\lvert y\rvert = \ln\lvert(\sqrt{x} \cdot C)\rvert$	
$y = C \cdot \sqrt{x}$	• Allgemeine Lösung Die Betragsstriche können aufgrund der Konstanten C weggelassen werden.

D **3.29** Argumentiere, welche der folgenden Differentialgleichungen mittels Trennen der Variablen gelöst werden können.

1) $y' = \frac{2x^2}{e^y}$ ***2)*** $y' + x = y$ ***3)*** $y' = 2x \cdot y$ ***4)*** $\dot{y} - 3t \cdot y = 0$

Aufgaben 3.30 – 3.36: Löse die folgenden Differentialgleichung mittels Trennen der Variablen.

B **3.30** **a)** $3y' + 2x \cdot y = 0$ ***b)*** $2 \cdot y' - 3x^2 \cdot y = 0$ ***c)*** $5y' - 2x^3 \cdot y = 0$

B **3.31** **a)** $y' + y \cdot \sin(x) = 0$ ***b)*** $y' + 3y \cdot \cos(x) = 0$ ***c)*** $2y \cdot \sin(x) + y' = 0$

B **3.32** **a)** $x \cdot y' - 2y = 0$ ***b)*** $e^x \cdot y' + y = 0$ ***c)*** $y' \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x) = 0$

B **3.33** **a)** $y' = 2 \cdot (5 - y)$ ***b)*** $y' = y + 2$ ***c)*** $y' - 4 \cdot (2 + y) = 0$

B **3.34** **a)** $y' - \frac{y^2}{x^2} = 0$ ***b)*** $y' \cdot (1 - x^2) + x \cdot y = 0$ ***c)*** $3x \cdot y' - y = 0$

B **3.35** **a)** $-5 \cdot \frac{dy}{dx} + 4y = 0$ ***b)*** $8 \cdot \frac{ds}{dt} - 3s = 0$ ***c)*** $50 \cdot \frac{dZ}{dt} + 10Z = 0$

B **3.36** Löse die Differentialgleichung nach $y = y(t)$.
a) $a \cdot \dot{y} + p \cdot y = 0$ ***b)*** $m \cdot \dot{y} + b \cdot y = 0$ ***c)*** $R \cdot C \cdot \dot{y} + y = 0$

BC **3.37** Bei einer Hausübung soll die Differentialgleichung $y' = y + 4$ mittels Trennen der Variablen gelöst werden. Angelika löst die Aufgabe folgendermaßen:

$\frac{dy}{dx} = y + 4$

$\frac{dy}{y} = 4dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = 4x + c \Rightarrow y = C \cdot e^{4x}$

Überprüfe die Berechnung und stelle sie gegebenenfalls richtig.

ABCD **3.38** Gegeben ist die Differentialgleichung $y \cdot y' + x = 0$.
1) Ermittle die speziellen Lösungen der Differentialgleichung für $y(3) = 4$ und $y(5) = 12$ mittels Trennen der Variablen.
2) Stelle das Richtungsfeld grafisch dar und zeichne die beiden Lösungen aus ***1)*** ein.
3) Argumentiere, warum es sich bei der allgemeinen Lösung um eine Menge von konzentrischen Kreisen handelt.

3.3 Anwendungen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Modelle zur Beschreibung von Änderungsvorgängen führen oft auf Differentialgleichungen, die mittels Trennen der Variablen lösbar sind.

3.3.1 Wachstums- und Abnahmemodelle

Mithilfe von Differenzengleichungen wurden in Band 3, Abschnitt 1.5.1, bereits diskrete Wachstums- und Zerfallsvorgänge beschrieben. Handelt es sich um kontinuierliche Prozesse, so können diese mithilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden. Vor allem im Zusammenhang mit dem Wachstum von Populationen wird der eigentlich diskrete Vorgang meist näherungsweise als kontinuierlich angesehen. Für ausreichend große Populationen wird daher im Allgemeinen mit Differentialgleichungen gearbeitet. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Größe y, die das Wachstum beschreibt, von der Zeit t abhängig ist.

Lineares und exponentielles Wachstum

Das einfachste Wachstumsmodell ist jenes, bei dem von einer konstanten Wachstumsgeschwindigkeit k ausgegangen wird: $y'(t) = k$
ZB: Eine Pflanze ist 50 cm hoch. Sie wächst pro Woche um 6 cm.
Dieser Zusammenhang kann in Form einer Differentialgleichung beschrieben werden:
$y'(t) = 6$
t ... Zeit in Wochen ab Beginn der Beobachtung, y(t) ... Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm

$y(t) = 6 \cdot t + C$ — ● Lösen der Differentialgleichung ergibt eine lineare Funktion.
$y(0) = 50 \Rightarrow C = 50$ — ● Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingung.
$y(t) = 6 \cdot t + 50$ — ● Die Funktion y beschreibt die Höhe der Pflanze zur Zeit t.

Eine **konstante Wachstumsgeschwindigkeit** führt auf das Modell des **linearen Wachstums**. Ist die Konstante **k negativ**, so handelt es sich um eine **lineare Abnahme**.

Bereits im 18. Jh. hat der britische Nationalökonom Thomas Malthus die These vertreten, dass das lineare Wachstumsmodell beschreibt, wie sich die Nahrungsmittelproduktion erhöht. Die Bevölkerung nimmt jedoch schneller zu, da **die Wachstumsgeschwindigkeit y′**, also **das Bevölkerungswachstum**, proportional zur Bevölkerungszahl y ist.

Thomas Malthus
1766 – 1834

Unter dieser Modellannahme erhält man folgende Differentialgleichung:

$y'(t) = k \cdot y(t)$ bzw. $k = \frac{y'(t)}{y(t)}$ — ● Die Konstante k wird **Wachstumsrate** genannt.

Lösen der Differentialgleichung $y'(t) = k \cdot y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = k \cdot \int dt \;\Rightarrow\; \ln|y| = k \cdot t + C_1 \;\Rightarrow\; y = C \cdot e^{k \cdot t}$$

Die Bevölkerungszahl kann also durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden:

$y(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ bzw. $y(t) = C \cdot a^t$ mit $a = e^k$

Die Konstante a bezeichnet man als **Wachstumsfaktor**.

Eine **konstante Wachstumsrate** führt auf das Modell des **exponentiellen Wachstums** bzw. der **exponentiellen Abnahme**, wenn die Wachstumsrate **negativ** ist.

ABC **3.39** Zu Beginn einer Untersuchung wies eine Insektenpopulation 1 200 Tiere auf. Die Anzahl der Insekten stieg täglich um 10 % an. Stelle ein geeignetes Wachstumsmodell mithilfe einer Differentialgleichung auf und löse diese. Gib die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor an.

Lösung:

tägliche Vermehrung um 10 %
→ konstante Wachstumsrate k

- Man kann von einer annähernd stetigen Vermehrung ausgehen, wobei der Zuwachs proportional zur jeweiligen Anzahl ist.

t … Anzahl der Tage
$y(t)$ … Insektenanzahl nach t Tagen

$y'(t) = k \cdot y(t)$

$y(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$y(0) = 1\,200 \Rightarrow C = 1\,200$

$y(1) = 1\,320$

- nach 1 Tag … 10 % mehr als zu Beginn

$1\,320 = 1\,200 \cdot e^{k \cdot 1}$

$\Rightarrow \quad k = 0{,}0953...$

$y(t) = 1\,200 \cdot e^{0{,}095 \cdot t}$ bzw.

$y(t) = 1\,200 \cdot 1{,}1^t$

- $a = e^{0{,}095} = 1{,}1$

Die Wachstumsrate k beträgt rund 0,095 und der Wachstumsfaktor a beträgt 1,1.

Lineares und insbesondere exponentielles Wachstum sind langfristig gesehen immer unrealistisch, da jedes Wachstum in der Realität an Grenzen stößt. Um diesem Umstand in einem Modell Rechnung zu tragen, werden **wachstumshemmende Faktoren** verwendet.

Beschränktes Wachstum

Geht man von einem ursprünglich linearen Wachstum aus, so wird die bisher konstante Wachstumsgeschwindigkeit mit einem Faktor multipliziert, der umso kleiner wird, je näher die Gesamtzahl der **Kapazitätsgrenze** (**Wachstumsgrenze**, **Sättigungsgrenze**) K kommt.

$y'(t) = a \cdot (K - y(t))$ bzw.

$y'(t) = k \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$

…

$y(t) = K + C \cdot e^{-\frac{k}{K} \cdot t}$

$y(t) = K + (y_0 - K) \cdot e^{-\frac{k}{K} \cdot t}$

- Der Faktor hemmt das Wachstum umso mehr, je mehr sich die Anzahl y dem Wert K nähert.
- Lösen der Differentialgleichung mittels Trennen der Variablen (siehe Aufgabe 3.48).
  Nach Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ erhält man die Funktion, die das **beschränkte Wachstum** beschreibt.

ZB: Das Wachstum einer Froschpopulation mit $k = 2$ und $K = 100$ soll für verschiedene Anfangswerte y_0 untersucht werden:

Anzahl der Frösche
Zeit in Tagen

- Unabhängig von der Wahl des Startwerts y_0 nähern sich die Kurven der Wachstumsgrenze $K = 100$ asymptotisch.
- Ist der Startwert sehr klein, verläuft das Wachstum anfangs annähernd linear.
- Ist der Startwert größer als K, so nimmt die Populationsgröße ab.
- Je näher die tatsächliche Anzahl der Wachstumsgrenze kommt, umso stärker verlangsamt sich das Wachstum.

Logistisches Wachstum

Wird ein **wachstumshemmender Faktor** in einem Modell berücksichtigt, das von einem **exponentiellen Wachstum** als Grundannahme ausgeht, so spricht man von **logistischem Wachstum** und erhält eine Differentialgleichung folgender Form:

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

Veranschaulicht man die Abhängigkeit der Änderungsrate y′ von der Anzahl y, so erhält man die unten dargestellte Parabel und kann bereits Aussagen über den Verlauf der Lösungsfunktionen treffen, ohne diese mithilfe der Differentialgleichung ermittelt zu haben.

- Wird als Startwert 0 oder K gewählt, beträgt die Änderungsrate 0, die Population existiert nicht ($y_0 = 0$) oder bleibt konstant ($y_0 = K$).
- y′ ist steigend bis zu einem Wert von $\frac{K}{2}$, die Lösungskurven sind in diesem Bereich positiv gekrümmt.
- y′ ist fallend ab einem Wert von $\frac{K}{2}$, die Lösungskurven sind in diesem Bereich negativ gekrümmt.
- Ist der Startwert y_0 größer als K, so nimmt die Population ab.
- Für jeden Startwert $\neq 0$ nähert sich die Populationsgröße der Kapazitätsgrenze K. Der Wert K wird daher auch **stabiler Gleichgewichtspunkt** genannt.

Die Lösung der Differentialgleichung mithilfe der Partialbruchzerlegung (siehe Aufgabe 3.49) ergibt die bereits in Band 2 angegebene Funktionsgleichung für das logistische Wachstum:

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$$

Einer der ersten, die dieses Modell anwendeten, war Raymond Pearl (amerikanischer Biologe und Mitbegründer der medizinischen Statistik). Er untersuchte die Vermehrung der Fruchtfliege Drosophila melanogaster und konnte eine zufriedenstellende Übereinstimmung des im Folgenden angegebenen logistischen Wachstumsmodells mit den beobachteten Daten nachweisen.

Raymond Pearl
1879 – 1940

t … Anzahl der Tage,
N(t) … Anzahl der Fruchtfliegen nach t Tagen

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{5} \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{1\,035}\right)$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{1\,035 \cdot N_0}{1\,035 + (1\,035 - N_0) \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t}}$$

Differentialgleichungen

Beschränktes und logistisches Wachstum
Wachstumshemmende Faktoren werden berücksichtigt.
k … Wachstumsrate, K … Kapazitätsgrenze
Beschränktes Wachstum:
Differentialgleichung: $y'(t) = k \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$ Wachstumsfunktion: $y(t) = K + (y_0 - K) \cdot e^{-\frac{k}{K} \cdot t}$
Logistisches Wachstum:
Differentialgleichung: $y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$ Wachstumsfunktion: $y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$

ABC **3.40** In der Grafik ist die Weltbevölkerung seit 1600 n. Chr. dargestellt.
1) Gib die Differentialgleichung für das exponentielle Wachstumsmodell an, wenn man von einer jährlichen Wachstumsrate von k = 0,005 ausgeht.
2) Ermittle die Lösung der Differentialgleichung und den Wachstumsfaktor.
3) Stelle die Lösungsfunktion und die gegebenen Daten in einem gemeinsamen Diagramm dar.
4) Gib an, in welchem Bereich die ermittelte Funktion eine geeignete Näherung darstellt.

AB **3.41** Schon Alexander der Große hat gerne Eis gegessen. Er ließ würfelförmige Eisblöcke mit Heu verpacken. Angeblich ist das Eis dadurch sehr langsam geschmolzen, sodass sich die Kantenlänge eines so verpackten Eisblocks in jeweils 7 Wochen halbiert hat.
1) Erstelle eine Differentialgleichung für die Kantenlänge, abhängig von der Zeit.
2) Ermittle die allgemeine Lösung.
3) Berechne, nach welcher Zeit 100 Liter Eis geschmolzen sind, wenn die Kantenlänge zu Beginn 50 cm beträgt.

ABD **3.42** Eine Obstplantage mit 8 000 Bäumen wird von Schädlingen befallen. Der Neubefall beträgt nach einer Woche jeweils 15 % der in der Vorwoche noch nicht befallenen Bäume.
1) Begründe, warum die Anzahl der befallenen Bäume mit dem Modell des beschränkten Wachstums beschrieben werden kann.
2) Erstelle aufgrund dieser Modellannahme eine Differentialgleichung.
3) Zu Beginn der Beobachtung waren 300 Bäume befallen. Ermittle die spezielle Lösung mit dieser Anfangsbedingung und berechne, nach welcher Zeit 90 % aller Bäume befallen sind.

AB **3.43** Bei der Einführung eines neuen Produkts geht die Marketingabteilung davon aus, dass bei Verkaufsstart 25 000 Stück pro Tag verkauft werden und der Absatz jeweils im Lauf einer Woche um 10 % sinken wird. Aufgrund von Marktanalysen erwartet man, dass sich der Absatz langfristig einem Wert von 8 000 Stück pro Tag nähern wird.
1) Stelle die Differentialgleichung auf, die diesen Absatzverlauf beschreibt.
2) Ermittle die Lösungsfunktion und gib die Wachstumsrate an.
3) Berechne, nach wie vielen Tagen der Absatz unter 10 000 Stück pro Tag sinkt.
4) Wenn der Absatz auf 15 000 Stück pro Tag gefallen ist, soll eine Werbekampagne starten, von der man sich erhofft, den Absatz 2 Wochen lang auf diesem Niveau halten zu können. Berechne, um wie viel Stück in diesem Zeitraum dadurch insgesamt mehr verkauft werden könnten als dies ohne Durchführung der Werbung der Fall wäre.

3.44 Eine Tierpopulation hat sich in 3 Jahren von 150 auf 250 Tiere vermehrt. Erstelle für jedes der folgenden Modelle die Differentialgleichung, ermittle deren Lösung und stelle die Funktion grafisch dar. AB

1) lineares Wachstum
2) exponentielles Wachstum
3) beschränktes Wachstum mit K = 900
4) logistisches Wachstum mit K = 900

3.45 In einem Badeteich vermehren sich im Sommer Algen. Das Wachstum beginnt, sobald eine Wassertemperatur von 10 °C überschritten wird. 14 Tage nach diesem Tag werden 250 Pflanzen gezählt. Man kann davon ausgehen, dass die Vermehrung durch eine logistische Wachstumsfunktion näherungsweise beschrieben werden kann. ABC

1) Stelle die entsprechende Differentialgleichung für eine anfängliche Anzahl y_0 und die Kapazitätsgrenze K auf und ermittle deren Lösung.
2) Ermittle die Kapazitätsgrenze K unter der Voraussetzung, dass nach 24 Tagen 320 Algen vorhanden waren und zu Beginn ***a)*** 80 Algen, ***b)*** 100 Algen vorhanden waren.
3) Stelle die in ***2)*** ermittelten Funktionen grafisch dar.

3.46 Raymond Pearl und Lowell Reed (1886 – 1966, amerikanischer Statistiker) beschrieben im Jahr 1920 auf Basis der Daten von drei Volkszählungen die Bevölkerungsentwicklung der USA mit einem logistischen Wachstumsmodell mit den Parametern k = 0,031395 und K = 197 274 und dem Anfangswert 2 890 (Bevölkerung im Jahr 1780 in Tausend). ABC

1) Gib die Differentialgleichung an und löse diese.
2) Vergleiche die so ermittelte Lösung anhand einer Grafik mit den tatsächlichen Daten:

Jahr	1790	1820	1850	1890	1920	1940	1970
Bevölkerung in Tausend	3 929	9 638	23 192	62 948	106 022	132 165	203 392

3.47 Nach dem Rückbau eines Staudamms ändert sich das Wasservolumen in einer Zisterne. Während das Wasservolumen y früher konstant 15 m³ betrug, gilt nun die folgende Differentialgleichung: ABCD

$y'(t) = 0{,}008 \cdot (60 - y(t))$

t … Zeit nach dem Rückbau in Wochen, y(t) … Volumen zur Zeit t in m³

1) Ermittle y(t). Gib die Funktion y′(t) an und erkläre deren Bedeutung in diesem Sachzusammenhang.
2) Berechne, mit welchem Wasservolumen langfristig gerechnet werden kann.
3) Jemand behauptet, dass es in der Zisterne einen konstanten Wasserzufluss und einen zeitabhängigen Wasserabfluss gibt. Beurteile die Behauptung mithilfe der Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

3.48 Zeige, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = k \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$, die das beschränkte Wachstum beschreibt, lautet: B

$y(t) = K + C \cdot e^{-\frac{k}{K} \cdot t}$

3.49 Zeige, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = k \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$, die das logistische Wachstum beschreibt, lautet: B

$y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-k \cdot t}}$

3.3.2 Anwendungen in den Naturwissenschaften

Bei der Untersuchung von **Bewegungsvorgängen** wurden bislang Reibungskräfte wie Luft- oder Flüssigkeitswiderstand vernachlässigt. Mithilfe von Differentialgleichungen lassen sich diese Kräfte berücksichtigen. Dabei geht man davon aus, dass alle Kräfte, die auf einen Körper wirken, zu jedem Zeitpunkt der Bewegung im **Kräftegleichgewicht** sind.

ZB: Ein Boot mit der Masse m wird auf einem ruhenden Gewässer mit einer konstanten Antriebskraft F_A bewegt. Die Widerstandskraft F_R des Wassers wirkt der Bewegung des Boots entgegen und ist direkt proportional zur momentanen Geschwindigkeit v des Boots, also gilt:
$F_R = b \cdot v$ (v … Geschwindigkeit, b … Reibungskoeffizient)

$F = F_A - F_R$ ● Kräftegleichung

$m \cdot a = F_A - b \cdot v$ ● Kraft = Masse · Beschleunigung

$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_A - b \cdot v$ ● Differentialgleichung

Löst man diese Differentialgleichung, erhält man die Funktion v des Geschwindigkeitsverlaufs.

ABCD **3.50** Carina fährt auf einer Rodel einen Hang hinunter. Am Ende des Hangs, zum Zeitpunkt t = 0 s, hat sie eine Geschwindigkeit von $36\,\frac{km}{h}$ und fährt auf ebenem Gelände ohne Antrieb ($F_A = 0$) weiter. Die Gesamtmasse von Carina und der Rodel beträgt m = 54 kg und für die Kraft F_R, die der Bewegung entgegenwirkt, gilt: $F_R = 30\,\frac{kg}{s} \cdot v$

1) Erkläre, wie man die allgemeine Lösung $v(t) = C \cdot e^{-\frac{30}{54} \cdot t}$ für die Geschwindigkeit ab dem Zeitpunkt t = 0 s erhält.
2) Ermittle die spezielle Lösung für die Funktion der Geschwindigkeit.
3) Stelle die spezielle Lösung aus **2)** grafisch dar und beschreibe den Verlauf der Geschwindigkeit, wenn genügend viel Zeit vergeht.
4) Gib eine Gleichung an, mit der man den Zeitpunkt ermitteln kann, bei der die Rodel im Auslauf einen Weg von 15 m zurückgelegt hat und ermittle diesen Zeitpunkt.

ABCD **3.51** Eine Motoryacht mit der Gesamtmasse m = 16 Tonnen bewegt sich auf einem ruhenden Gewässer geradlinig mit der Geschwindigkeit $v = 72\,\frac{km}{h}$. Bei dieser Geschwindigkeit wird der Motor abgeschaltet. Innerhalb von 10 s verringert sich die Geschwindigkeit um $1{,}8\,\frac{km}{h}$. Für die Reibungskraft F_R gilt: $F_R = b \cdot v$
1) Begründe, warum dieser Bewegungsvorgang durch die Differentialgleichung $m \cdot \dot{v} = -b \cdot v$ beschrieben wird.
2) Ermittle die Funktion der Momentangeschwindigkeit v der Yacht nach dem Abschalten des Motors und gib den Reibungskoeffizienten b an.
3) Stelle die Funktion v grafisch dar und interpretiere ihren Verlauf.
4) Berechne, welchen Gesamtweg die Yacht nach dem Abschalten des Motors zurücklegen kann, ohne dass zusätzliche Kraft aufgewendet wird.

Anwendungen in der Thermodynamik

Werden zwei Körper unterschiedlicher Temperatur in Kontakt miteinander gebracht, so findet ein Temperaturausgleich statt. Die Wärmeenergie geht dabei immer von einem Körper mit höherer Temperatur zu einem Körper mit niedrigerer Temperatur über. Die Änderung der Temperatur T eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch das **Newton'sche Abkühlungsgesetz** beschrieben: $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$

k … Abkühlkonstante, T_U … Umgebungstemperatur

3.52 Eine Probe mit einer Temperatur von 160 °C wird zum Abkühlen in ein Wasserbad mit einer Temperatur von 20 °C gelegt. Die Probe kühlt dabei innerhalb von 5 Minuten auf 100 °C ab. **AB**

1) Stelle die Differentialgleichung auf, die den Abkühlvorgang beschreibt.

2) Berechne, wie lang es dauert, bis die Probe eine Temperatur von 30 °C hat.

3.53 In eine Badewanne wird heißes Wasser gefüllt. Die Raumtemperatur des Badezimmers beträgt 25 °C. Man misst eine Wassertemperatur von 43 °C, was zu heiß ist, um ein Bad zu nehmen. Nach 10 Minuten beträgt die Temperatur des Wassers 38 °C. **ABD**

1) Die Änderung der Wassertemperatur erfolgt nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz. Beschreibe das Abkühlungsgesetz mit eigenen Worten.

2) Löse die Anfangswertaufgabe und gib den Faktor k an.

3) Argumentiere, ob nach weiteren 10 Minuten die ideale Wassertemperatur von 35 °C erreicht wird.

Mischvorgänge

Bei der Untersuchung von Mischvorgängen beschreibt man den Zu- und Abfluss sowie die zeitabhängige Konzentration von Stoffen, die in einem Medium gelöst sind, mithilfe von Differentialgleichungen.

3.54 In einem Flüssigkeitstank befinden sich zu Beginn 10 kg Zucker gelöst in 100 Liter Wasser. In diesen Tank fließen pro Minute 10 L einer Zuckerlösung mit einer Konzentration von $0{,}02\frac{\text{kg}}{\text{L}}$ ein und 10 L gemischte Flüssigkeit wieder aus. Im Tank wird die Lösung gut durchgemischt. Wie viel kg Zucker enthält der Tank nach 30 Minuten? **AB**

Lösung:

Z … Zuckermenge im Tank in kg, t … Zeit in Minuten

Zufluss: $10\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot 0{,}02\frac{\text{kg}}{\text{L}}$; Abfluss: $10\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot \frac{Z}{100\text{ L}}$

$\frac{dZ}{dt} = 10 \cdot 0{,}02 - 10 \cdot \frac{Z}{100}$ — ● Änderungsrate: Zufluss minus Abfluss

$\frac{dZ}{dt} = 0{,}2 - \frac{Z}{10} = \frac{2 - Z}{10}$ — ● Vereinfachte Differentialgleichung

$\int \frac{dZ}{2 - Z} = \frac{1}{10} \int dt$

$-\ln|2 - Z| = \frac{1}{10}t + \overline{C}$

$Z = 2 - C \cdot e^{-0{,}1t}$ — ● Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$Z(0) = 10 \Rightarrow C = -8$ — ● Einsetzen der Anfangsbedingung

$Z(t) = 2\text{ kg} + 8\text{ kg} \cdot e^{-0{,}1\frac{1}{\text{min}} \cdot t}$ — ● Spezielle Lösung der Differentialgleichung

$Z(30) = 2{,}398\text{ kg}$

Der Tank enthält nach 30 Minuten rund 2,4 kg Zucker.

3.55 In einem Veranstaltungssaal mit einem Volumen von 5 000 m^3 wird in der Atemluft ein CO_2-Gehalt von 1 000 ppm gemessen. Durch Einschalten der Belüftungsanlage werden pro Minute 50 m^3 der Saalluft gleichmäßig durch Frischluft mit einem CO_2-Gehalt von 500 ppm ersetzt. **AB**

1) Ermittle den CO_2-Gehalt 20 Minuten nach Aktivierung der Frischluftpumpe.

2) Berechne, nach wie viel Minuten der CO_2-Gehalt im Saal nur mehr 0,07 % beträgt.

3.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

BC **3.56** ***1)*** Löse die Differentialgleichungen $y' - 2y = 0$ und $y' - 2y = 4$ jeweils mittels Trennen der Variablen.

2) Vergleiche die Ergebnisse aus ***1)***. Welcher Zusammenhang fällt dir auf?

Eine Differentialgleichung der Form $y' + f(x) \cdot y = s(x)$ heißt **inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Die Funktion $s(x)$ wird als **Störfunktion** bezeichnet, weil sie in vielen Anwendungen den äußeren Einfluss auf ein System beschreibt. Gibt es keinen äußeren Einfluss, ist also $s(x) = 0$, nennt man die Differentialgleichung **homogen**. Ist die Funktion $f(x) = p$ konstant, spricht man von einer **linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Homogene Differentialgleichung: $y' + f(x) \cdot y = 0$

Inhomogene Differentialgleichung: $y' + f(x) \cdot y = s(x)$ $s(x)$ … Störfunktion

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y' + p \cdot y = 0$ bzw. $y' + p \cdot y = s(x)$ mit $p \in \mathbb{R}$

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' + f(x) \cdot y = 0$ kann mittels Trennen der Variablen gelöst werden. Ist $f(x) = p$ konstant, sind die Lösungen **Exponentialfunktionen** der Form $y = C \cdot e^{-p \cdot x}$.

ZB: $y' + 3 \cdot y = 0$

$$y' = -3y \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int 3\,dx \Rightarrow \ln|y| = -3x + \bar{C} \Rightarrow |y| = e^{-3x} \cdot e^{\bar{C}} \Rightarrow y = C \cdot e^{-3x}$$

Da die Lösungen von homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten immer Exponentialfunktionen dieser Form sind, können die Lösungen auch mithilfe des so genannten **Exponentialansatzes** ermittelt werden.

$y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$y' = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$
- Exponentialansatz; $C \neq 0$, da $y = 0$ nicht die allgemeine Lösung ist. Die Funktion muss einmal abgeleitet werden.

$y' + 3 \cdot y = 0$
$C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + 3 \cdot C \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0$
- Einsetzen in die Differentialgleichung

$C \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot (\lambda + 3) = 0$
- Herausheben von $C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ und dividieren

$\lambda + 3 = 0$
$\lambda = -3$
- Diese Gleichung hat dieselben Koeffizienten wie die Differentialgleichung. Daher nennt man sie die **charakteristische Gleichung** der Differentialgleichung.

$y = C \cdot e^{-3x}$
- Einsetzen von $\lambda = -3$ führt auf die allgemeine Lösung.

Die **allgemeine Lösung** y jeder homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $y' + p \cdot y = 0$ ist eine **Exponentialfunktion** der Form $y = C \cdot e^{-p \cdot x}$ $(C, p \in \mathbb{R})$.

Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.57 Betrachte folgende Gleichung: $2x + 3 + 4 \cdot (x^2 + 3x - 1) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ CD

a) Vergleiche die farbig gestalteten Teile. Erkläre, welcher Zusammenhang besteht.

b) Argumentiere, welche Werte die Variablen A, B und C annehmen müssen, damit die Gleichung erfüllt ist.

Die Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' + p \cdot y = s(x)$ wird anhand eines anschaulichen Beispiels erklärt.

Ein Jetski mit der Masse m = 400 kg fährt geradlinig auf einem ruhenden Gewässer. Durch den Motor wirkt eine Antriebskraft $F_A = 2{,}4$ kN. Die Bewegung wird durch den Wasserwiderstand gebremst. Es wird angenommen, dass die Widerstandskraft F_R direkt proportional zur Momentangeschwindigkeit v des Boots ist:
$F_R = b \cdot v \left(b = 80 \,\frac{kg}{s}\right)$

Durch Aufstellen der Kräftebilanz erhält man eine Differentialgleichung, die die Änderung der Geschwindigkeit v im Lauf der Zeit t beschreibt:

$F = F_A - F_R$ bzw. $m \cdot \dot{v} = F_A - b \cdot v \;\Rightarrow\; \dot{v} + \frac{b}{m} \cdot v = \frac{F_A}{m} \;\Rightarrow\; \dot{v} + 0{,}2 \cdot v = 6$

Diese Differentialgleichung lässt sich mittels Trennen der Variablen lösen:

$\frac{dv}{dt} = -0{,}2v + 6$ ● Umformen der Differentialgleichung

$\frac{dv}{dt} = -0{,}2 \cdot (v - 30)$ ● Trennen der Variablen

$\int \frac{dv}{v - 30} = \int (-0{,}2)\, dt$

$\ln|v - 30| = -0{,}2 \cdot t + \bar{C}$

$v - 30 = C \cdot e^{-0{,}2t}$

$v(t) = C \cdot e^{-0{,}2t} + 30$ ● Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung setzt sich aus zwei Teilen zusammen.

- Der erste Teil der Lösung, $v_1 = C \cdot e^{-0{,}2t}$, entspricht der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $\dot{v} + 0{,}2 \cdot v = 0$. Diese Lösung gilt, wenn keine Antriebskraft auf den Jetski wirkt, also wenn $F_A = 0$ ist:
  $m \cdot \dot{v} = -b \cdot v + 0 \;\Rightarrow\; \dot{v} + \frac{b}{m} \cdot v = 0$
  Dieser Teil der allgemeinen Lösung wird kurz **homogene Lösung** v_h genannt: $v_h = C \cdot e^{-0{,}2t}$
- Der zweite Teil der Lösung, $v_2 = 30$, ist eine spezielle Lösung von $\dot{v} + 0{,}2 \cdot v = 6$, wie sich durch Einsetzen zeigen lässt:
  $v_2 = 30; \quad \dot{v}_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 0 + 0{,}2 \cdot 30 = 6$ w. A.
  Dieser Teil der allgemeinen Lösung wird daher **partikuläre Lösung** v_p genannt: $v_p = 30$

Man erkennt: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus **zwei Teilen** zusammen. Setzt man die Störfunktion null (hier F_A), so erhält man die zugehörige homogene Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung v_h ermittelt werden kann. Unabhängig davon kann man eine **partikuläre Lösung** v_p der inhomogenen Differentialgleichung ermitteln. Diese Lösung ist **vom selben Typ** wie die **Störfunktion**. Die **allgemeine Lösung** der inhomogenen Gleichung ist die **Summe** der Lösungen: $v = v_h + v_p$

Geschwindigkeitsfunktion v: $v(t) = \underbrace{C \cdot e^{-0{,}2t}}_{\text{homogene Lösung } v_h} + \overbrace{30}^{\text{partikuläre Lösung } v_p}$

Differentialgleichungen

Ist die Anfangsgeschwindigkeit des Jetskis aus dem vorangegangenen Beispiel bekannt, zB $v_0 = 20\,\frac{m}{s}$, kann man die Anfangswertaufgabe lösen und diese spezielle Lösung grafisch darstellen:

$v(t) = C \cdot e^{-0,2t} + 30$ $\qquad v(0) = 20 \Rightarrow C = -10$

$\Rightarrow$ Spezielle Lösung: $v(t) = -10 \cdot e^{-0,2t} + 30$

Aus dem Graphen geht hervor, dass sich die Funktion v für $t \to \infty$ dem Wert $30\,\frac{m}{s}$ nähert:

$\lim\limits_{t \to \infty} (v(t)) = 30\,\frac{m}{s}$

Aufgrund des Wasserwiderstands ist es für den Jetski unmöglich, eine Geschwindigkeit von mehr als $30\,\frac{m}{s}$ zu erreichen.

Die Bewegung des Jetskis wird langfristig gesehen nur durch die **partikuläre Lösung** $v_p = 30$ beschrieben, die daher als **stationärer Teil** der Lösung bezeichnet wird.
Da die **homogene Lösung** $v_h = C \cdot e^{-0,5t}$ für $t \to \infty$ den Wert 0 annimmt, nennt man sie den **flüchtigen Teil** der Lösung.

Die **allgemeine Lösung** einer inhomogenen Differentialgleichung ist die **Summe** aus der **homogenen Lösung** und einer **partikulären Lösung**: $y = y_h + y_p$
Dabei ist y_h der **flüchtige Teil** und y_p der **stationäre Teil** der Lösung.

ZB: Es soll die Anfangswertaufgabe $y' + 2 \cdot y = 4x - 5$ mit $y(0) = 0,5$ gelöst und eine Probe durchgeführt werden. Anschließend sollen die einzelnen Lösungen grafisch dargestellt und interpretiert werden.

- **Homogene Lösung:**

  $y' + 2 \cdot y = 0$ — Homogene Differentialgleichung

  $y_h = C \cdot e^{-2x}$ — Homogene Lösung

- **Partikuläre Lösung:**

  Die Störfunktion $s(x) = 4x - 5$ ist eine lineare Funktion. Der Lösungsansatz ist vom selben Typ wie die Störfunktion. Daher wählt man eine allgemeine lineare Funktion:

  $\mathbf{y_p = A \cdot x + B}$

  Da sowohl die Funktion als auch deren Ableitung die Gleichung erfüllen müssen, benötigt man auch die Ableitung:

  $\mathbf{y_p' = A}$

  $y' + 2 \cdot y = 4x - 5$ — Anschreiben der Differentialgleichung

  $A + 2 \cdot (A \cdot x + B) = 4x - 5$ — Einsetzen von y und y′ in die Gleichung

  $A + 2A \cdot x + 2B = 4x - 5$ — Ausmultiplizieren auf der linken Seite der Gleichung

  $2A \cdot x + (A + 2B) = 4 \cdot x + (-5)$ — Sortieren der Gleichung nach den Koeffizienten von x

  x^1: $2A = 4$
  x^0: $A + 2B = -5$
  $A = 2; \quad B = -3,5$

  — **Koeffizientenvergleich:** Die Koeffizienten von gleichen Potenzen (x^1 und x^0) müssen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Man erhält ein Gleichungssystem.

  $\Rightarrow y_p = 2x - 3,5$ — Einsetzen von A und B in den linearen Ansatz führt auf die partikuläre Lösung y_p.

- **Allgemeine Lösung:**

$y = y_h + y_p$

$\Rightarrow\ y = C \cdot e^{-2x} + 2x - 3{,}5$

- Die allgemeine Lösung ist die Summe aus homogener und partikulärer Lösung.

- **Lösung der Anfangswertaufgabe:**

$y(0) = 0{,}5 \ \Rightarrow\ 0{,}5 = C \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3{,}5$

$C = 4$

- Einsetzen der Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung führt auf C = 4.

$y = 4 \cdot e^{-2x} + 2x - 3{,}5$

- Spezielle Lösung

- **Probe:**

$y' = -8 \cdot e^{-2x} + 2$

$y' + 2 \cdot y = 4x - 5$

- Ermitteln der ersten Ableitung
- Einsetzen von y und y′ in die Differentialgleichung

$$-8 \cdot e^{-2x} + 2 + 2 \cdot (4 \cdot e^{-2x} + 2x - 3{,}5) = 4x - 5$$

$$\cancel{-8 \cdot e^{-2x}} + 2 + \cancel{8 \cdot e^{-2x}} + 4x - 7 = 4x - 5$$

$$4x - 5 = 4x - 5$$

Die Gleichung stimmt auf beiden Seiten überein, die Funktion $y = 4 \cdot e^{-2x} + 2x - 3{,}5$ ist jene spezielle Lösung, die die Anfangswertaufgabe erfüllt.

- **Grafische Darstellung:**

Die Funktion $y(x) = 4 \cdot e^{-2x} + 2x - 3{,}5$ nähert sich asymptotisch der partikulären Lösung:
$y_p = 2x - 3{,}5$

Flüchtiger Teil: $y_h = 4 \cdot e^{-2x}$

Stationärer Teil: $y_p = 2x - 3{,}5$

Die folgende Tabelle zeigt einige **Lösungsansätze für die partikuläre Lösung y_p** einer inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y' + p \cdot y = s(x)$:

Störfunktion s(x)	Lösungsansatz für y_p
Konstante Funktion: $s(x) = a$	$y_p = A$
Lineare Funktion: $s(x) = a \cdot x + b$	$y_p = A \cdot x + B$
Polynomfunktion vom Grad n	$y_p = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0$
Winkelfunktionen: $s(x) = a \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$
$s(x) = a \cdot \cos(\omega x)$	
$s(x) = a \cdot \sin(\omega x) + b \cdot \cos(\omega x)$	
Exponentialfunktion: $s(x) = a \cdot e^{bx}$	$y_p = A \cdot e^{bx}$ für $b \neq -p$ $y_p = A \cdot x \cdot e^{bx}$ für $b = -p$

BC **3.58** Löse die Differentialgleichung $y' + 4y = -0{,}5 \cdot \sin(2x)$ mit $y(0) = 0$. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:
Ich stelle zuerst die homogene Gleichung auf und löse sie mit dem Exponentialansatz:
$y' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4$
Die homogene Lösung lautet: $y_h = C \cdot e^{-4x}$

Die Störfunktion ist eine Sinusfunktion. Ich verwende den Lösungsansatz für die partikuläre Lösung aus der Tabelle und setze für $\omega = 2$ ein. Ich leite y_p einmal ab.
$y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$
$y_p' = 2 \cdot A \cdot \cos(2x) - 2 \cdot B \cdot \sin(2x)$

Nun setze ich y_p und y_p' in die Differentialgleichung ein:
$2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x) + 4 \cdot (A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)) = -0{,}5 \cdot \sin(2x)$
$2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x) + 4A \cdot \sin(2x) + 4B \cdot \cos(2x) = -0{,}5 \cdot \sin(2x)$

Um einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können, hebe ich jeweils sin(2x) und cos(2x) heraus. Auf der rechten Seite ergänze ich $0 \cdot \cos(2x)$.

$(\mathbf{4A - 2B}) \cdot \sin(2x) + (\mathbf{2A + 4B}) \cdot \cos(2x) = \mathbf{-0{,}5} \cdot \sin(2x) + \mathbf{0} \cdot \cos(2x)$

Nun löse ich das Gleichungssystem: **sin(2x)**: $4A - 2B = -0{,}5$
cos(2x): $2A + 4B = 0$
$A = -0{,}1; \; B = 0{,}05$

Eine partikuläre Lösung lautet: $y_p = -0{,}1 \cdot \sin(2x) + 0{,}05 \cdot \cos(2x)$

Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C \cdot e^{-4x} - 0{,}1 \cdot \sin(2x) + 0{,}05 \cdot \cos(2x)$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ wird in die allgemeine Lösung eingesetzt:

$0 = C \cdot e^0 - 0{,}1 \cdot \sin(0) + 0{,}05 \cdot \cos(0)$
$0 = C \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C = -0{,}05$

Somit erhalte ich die spezielle Lösung: $y = -0{,}05 \cdot e^{-4x} - 0{,}1 \cdot \sin(2x) + 0{,}05 \cdot \cos(2x)$

Technolgieeinsatz: Lineare Differentialgleichungen
TI-Nspire

Mathcad, GeoGebra: www.hpt.at

ZB: Es soll die Anfangswertaufgabe $y' + 2y = 4x$ mit $y(0) = 3$ gelöst werden.

Über das Menü **4: Analysis**, **D: Differentialgleichungslöser** erscheint im Eingabefenster der Befehl **deSolve()** („differential equation“). Nun wird in die Klammern die Differentialgleichung und, durch Beistriche getrennt, erst die unabhängige, dann die abhängige Variable eingegeben. Die Schreibweise von y' kann über die Taste [π▸] aufgerufen werden.
Um eine allgemeine Lösung zu erhalten, muss also Folgendes eingegeben werden: **deSolve(y′+2y=4x,x,y)**
Für eine spezielle Lösung muss zusätzlich die Anfangsbedingung mittels „and“ angeführt werden:
deSolve(y′+2y=4x and y(0)=3,x,y)

Variation der Konstanten

Die Lösungsmethode mithilfe der speziellen Lösungsansätze funktioniert nur bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Um Differentialgleichungen der Form $y' + f(x) \cdot y = s(x)$ zu lösen, kann die **Variation der Konstanten** verwendet werden. Die Idee dazu geht auf den französischen Mathematiker Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) zurück. Man ersetzt die Integrationskonstante C der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung durch eine zunächst noch unbekannte Funktion C(x). Diese ist im Gegensatz zur Konstanten C variabel, daher spricht man von der Variation der Konstanten.

ZB: Es soll die Anfangswertaufgabe $y' - 2x \cdot y = e^{x^2}$ mit $y(1) = -2e$ gelöst werden.

- **Homogene Lösung:**

  $y' - 2x \cdot y = 0$

  $\int \frac{1}{y}\,dy = 2\int x\,dx$

  $\ln|y| = x^2 + C$

  - Die homogene Differentialgleichung erhält man durch Nullsetzen der Störfunktion. Sie wird durch Trennen der Variablen gelöst.

  $y_h = C \cdot e^{x^2}$

  - Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

- **Partikuläre Lösung:**

  In der homogenen Lösung y_h wird die Konstante C durch die Funktion C(x) ersetzt.

  $y_p(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$ — Variation der Konstanten

  $y_p'(x) = C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot 2x \cdot e^{x^2}$ — Bilden der Ableitung

  $\underbrace{C'(x) \cdot e^{x^2} + \cancel{2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2}}}_{y_p'} \underbrace{- \cancel{2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2}}}_{-2x \cdot y_p} = \underbrace{e^{x^2}}_{s(x)}$ — Einsetzen in die inhomogene Gleichung. Die Terme mit C(x) müssen immer wegfallen.

  $C'(x) \cdot e^{x^2} = e^{x^2}$ — Vereinfachen der Gleichung

  $C'(x) = 1$

  $C(x) = \int 1\,dx = x$ — Für die bei der Integration anfallende Konstante kann null gewählt werden, da nur **eine** spezielle Lösung gesucht wird.

  $y_p = x \cdot e^{x^2}$ — C(x) in den Ansatz für y_p einsetzen

- **Allgemeine Lösung:**

  $y = y_h + y_p$

  $y = C \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2}$

  - Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der Einzellösungen.

- **Lösung der Anfangswertaufgabe:**

  $y(1) = -2e$ — Anfangsbedingung

  $-2e = C \cdot e + e$ — Einsetzen der Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung

  $-3e = C \cdot e \Rightarrow C = -3$

  $y = -3 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2}$ — Spezielle Lösung

B **3.59** Löse die Differentialgleichung $y' - y \cdot \sin(x) = \sin(x)$ für $y(0) = 2$.

Lösung:

Homogene Lösung:

$y' - y \cdot \sin(x) = 0$ • Homogene Gleichung

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \sin(x)\,dx$

$\ln(|y|) = -\cos(x) + \overline{C}$

$y_h = C \cdot e^{-\cos(x)}$ • Homogene Lösung

Partikuläre Lösung:

$y_p = C(x) \cdot e^{-\cos(x)}$ • Variation der Konstanten

$y_p{}' = C'(x) \cdot e^{-\cos(x)} + C(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$

$C'(x) \cdot e^{-\cos(x)} + \cancel{C(x) \cdot \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}} - \cancel{\sin(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\cos(x)}} = \sin(x)$

$C'(x) \cdot e^{-\cos(x)} = \sin(x)$ • Vereinfachen

$C(x) = \int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}\,dx$ • Integration

$C(x) = -e^{\cos(x)}$

$y_p = -e^{\cos(x)} \cdot e^{-\cos(x)}$

$y_p = -1$ • Partikuläre Lösung

Allgemeine Lösung:

$y = y_h + y_p$

$y = C \cdot e^{-\cos(x)} - 1$ • Allgemeine Lösung

Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 2$:

$2 = C \cdot e^{-\cos(0)} - 1$

$3 = C \cdot e^{-1} \Rightarrow C = 3e$

$y = 3 \cdot e^{1 - \cos(x)} - 1$ • Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

AD **3.60** Begründe, welche der folgenden Differentialgleichungen homogen bzw. inhomogen sind.
1) $y' + 2y = e^x$ **2)** $y' + y - \sin(x) = 0$ **3)** $5y' = 2y$ **4)** $y' - 8y = 0$

AB **3.61** Löse die Differentialgleichung und führe die Probe durch.
a) $y' + 6y = 0$ **b)** $3y' + 9y = 0$ **c)** $2y' + y = 0$ **d)** $-5y' + 12y = 0$

Aufgaben 3.62 - 3.63: Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung mithilfe eines geeigneten Lösungsansatzes.

AB **3.62** **a)** $y' + 5y = 1$ **b)** $y' - 3y = 6t$ **c)** $2y' + 3y = 4$ **d)** $0{,}5y' + y = 2t$

AB **3.63** **a)** $y' + 2y = 3 \cdot e^t$ **b)** $y' - 5y = e^{5 \cdot t}$ **c)** $y' + 0{,}5y = 2 \cdot e^{-2 \cdot t}$ **d)** $3y' + y = e^{-t}$

Aufgaben 3.64 - 3.65: Löse die Anfangswertaufgabe mit $y(0) = y_0$.

AB **3.64** **a)** $y' + 0{,}5y = 3;\ y_0 = -1$ **d)** $4y' + 3y = 4 \cdot e^{-0{,}75t};\ y_0 = 2$

b) $2y' - 4y = 10;\ y_0 = 1$ **e)** $y' - 2y = 3 \cdot \sin(t);\ y_0 = 0$

c) $y' + 8y = 2 \cdot e^{-3t};\ y_0 = -1$ **f)** $y' + 4y = 5 \cdot \cos(2t);\ y_0 = \pi$

AB **3.65** **a)** $y' + 2y = \sin(x) - 2 \cdot \cos(x);\ \ y_0 = 0$ **b)** $y' - 8y = \cos(2x) + 4 \cdot \sin(2x);\ \ y_0 = 0$

Aufgaben 3.66 – 3.68: Löse die Anfangswertaufgabe mithilfe der Variation der Konstanten.

3.66 **a)** $2y' + 4x \cdot y = 6 \cdot e^{-x^2}$; $y(0) = 1$ **b)** $y' + 3x^2 \cdot y = e^{-x^3}$; $y(0) = 6$ B

3.67 **a)** $y' + 3t \cdot y = 6t$; $y(0) = 0$ **b)** $y' + x \cdot y = 2x$; $y(0) = 3$ B

3.68 **a)** $y' - 2 \cdot \sin(x) \cdot y = \sin(x)$; $y(0) = 2$ **b)** $y' + 6 \cdot \cos(x) \cdot y = \cos(x)$; $y(0) = \pi$ B

3.69 **1)** Löse die angegebene Anfangswertaufgabe. B
2) Stelle die Lösung y aus **1)** gemeinsam mit der partikulären Lösung y_p in einem Koordinatensystem grafisch dar und interpretiere den Verlauf der Graphen.
3) Begründe deine Interpretation aus **2)** mithilfe einer Grenzwertberechnung.
a) $y' + 3y = 6x - 1$; $y(0) = 3$ **b)** $y' - 6y = 3x + 11{,}5$; $y(0) = 2{,}5$

TE

Anwendungen in der Mechanik

3.70 Ein anfangs ruhender Schlitten mit der Gesamtmasse m = 90 kg wird mit einer konstanten Kraft F_A = 30 N über eine Eisfläche gezogen. Aufgrund der Reibung ist die Widerstandskraft F_R, die der Bewegung des Schlittens entgegen wirkt, gleich dem 60-fachen der Momentangeschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$). ABD
1) Erkläre, warum diese Bewegung mithilfe von $m \cdot \frac{dv}{dt} = F_A - F_R$ beschrieben wird.
2) Stelle die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v auf und löse die Anfangswertaufgabe. Welche Geschwindigkeit hat der Schlitten nach 10 Minuten?

3.71 Max möchte mit einem Elektrofahrrad geradlinig einen Sandstrand entlang fahren. Gemeinsam mit dem Fahrrad hat er eine Masse von m = 81 kg. Die Reibungskraft F_R ist direkt proportional zur momentanen Geschwindigkeit v, wobei der Reibungskoeffizient von Sand $b = 27\,\frac{kg}{s}$ beträgt. Das Elektrofahrrad weist eine Antriebskraft von F_A = 216 N auf. Die zugehörige Differentialgleichung lautet: ABCD
$m \cdot \frac{dv}{dt} + b \cdot v = F_A$
1) Max startet mit eingeschaltetem Motor. Ermittle den Verlauf der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t. Beschreibe deine Vorgehensweise.
2) Argumentiere anhand einer Rechnung, welche Geschwindigkeit das Fahrrad nicht überschreitet.
3) Als Max eine Geschwindigkeit von $24\,\frac{km}{h}$ erreicht hat, schaltet er den Elektromotor aus, es wirkt keine Antriebskraft mehr, das Fahrrad rollt aus. Ermittle die Funktion v der Geschwindigkeit ab dem Abschalten des Motors.
4) Beschreibe, wie man den Weg beim Ausrollen ermitteln kann und berechne diesen.

3.72 Eine Kugel aus Stahl mit einem Durchmesser d = 10 cm und einer Dichte $\rho = 7{,}8\,\frac{kg}{dm^3}$ befindet sich am oberen Rand eines senkrecht stehenden, mit Öl gefüllten Rohrs (Dichte $\rho_{Öl} = 0{,}88\,\frac{kg}{dm^3}$). Zu Beginn der Messung wird sie losgelassen und fällt im Rohr nach unten. Nach dem Stokes'schen Gesetz gilt für die Reibungskraft F_R in der Flüssigkeit: ABC
$F_R = 6\pi \cdot \eta_{Öl} \cdot r \cdot v$ ($\eta_{Öl}$ = 0,7 Pa · s … Viskosität, r … Kugelradius in m, v … Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$)
1) Erkläre, warum der Bewegungsvorgang durch die Differentialgleichung
$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - 6\pi \cdot \eta_{Öl} \cdot r \cdot v$ ($g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$) beschrieben werden kann.
2) Ermittle die Funktion der Sinkgeschwindigkeit v der Stahlkugel.
3) Berechne, zu welchem Zeitpunkt 95% der maximalen Sinkgeschwindigkeit erreicht wird.

Differentialgleichungen

Anwendungen in der Elektrotechnik

Lade- und Entladevorgänge von elektrischen Schaltungen, die einen Ohm'schen Widerstand und eine Spule (RL-Glied) bzw. einen Kondensator (RC-Glied) beinhalten, führen auf Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das Aufstellen der jeweiligen Differentialgleichung erfolgt mithilfe der Maschenregel und grundlegenden Zusammenhängen aus der Elektrotechnik.
Ist keine Spannung angelegt ($u(t) = 0$) oder die angelegte Spannung eine Gleichspannung ($u(t) = U_0$), so können diese durch Trennen der Variablen gelöst werden. Im Allgemeinen, also auch für zeitabhängige Spannungsfunktionen $u(t)$, kann die Lösung mithilfe eines geeigneten Ansatzes für die Störfunktion ermittelt werden.

RL-Glied:

t = 0, R, L, u(t)

$$\left.\begin{array}{l} -u(t) + u_R + u_L = 0 \\ u_R = R \cdot i \\ u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \end{array}\right\} \quad L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = u(t)$$

mit $\frac{L}{R} = \tau$ ... Zeitkonstante

RC-Glied:

t = 0, R, C, u(t)

$$\left.\begin{array}{l} -u(t) + u_R + u_C = 0 \\ u_R = R \cdot i \\ i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \end{array}\right\} \quad u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = u(t)$$

mit $R \cdot C = \tau$ ... Zeitkonstante

ABC **3.73** An ein RC-Glied mit $R = 2\ \text{k}\Omega$ und einem ungeladenen Kondensator mit der Kapazität $C = 100\ \mu\text{F}$ wird eine Spannung $U_0 = 12\ \text{V}$ angelegt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s wird der Schalter geschlossen. Ermittle den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung u_C mithilfe einer Differentialgleichung. Interpretiere die Funktion hinsichtlich stationärem und flüchtigem Lösungsanteil und stelle die Lösung grafisch dar.

Lösung:

$u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = u(t)$

$u_C + 0{,}2 \cdot \frac{du_C}{dt} = 12 \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = 5 \cdot (12 - u_C)$
- Lösen der Differentialgleichung mittels Trennen der Variablen;

$\frac{du_C}{12 - u_C} = 5 \cdot dt \Rightarrow -\ln|12 - u_C| = 5 \cdot t + \overline{K}$
- $\overline{K}$ ... Integrationskonstante

$u_C = 12 - K \cdot e^{-5t}$
- Umformen der Gleichung auf u_C

$u_C(0) = 0 \Rightarrow K = 12$
- Einsetzen der Anfangsbedingung

$u_C(t) = 12 - 12 \cdot e^{-5t}$ bzw. $u_C(t) = 12 \cdot (1 - e^{-5t})$

Die Werte des Terms $-12 \cdot e^{-5t}$ nähern sich sehr schnell null, dieser Term ist der flüchtige Teil der Lösung. 12 ist der stationäre Teil der Lösung, die Kondensatorspannung nähert sich asymptotisch dem Wert 12V.

$u_C(t)$ in V; 12; 8; 4; 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; t in s

AB **3.74** An ein RC-Glied wird keine äußere Spannung angelegt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s wird der Schalter geschlossen. Gib die Differentialgleichung für den Spannungsverlauf u_C während der Entladung des Kondensators an und ermittle die Lösung der Differentialgleichung mittels Trennen der Variablen.

1) für $R = 500\ \Omega$, $C = 2$ mF, $u_C(0) = 15$ V ***2)*** allgemein

Aufgaben 3.75 – 3.78: Die Lösung kann mittels Trennen der Variablen ermittelt werden.

3.75 An ein RC-Glied mit einem ungeladenen Kondensator wird eine Spannung U_0 angelegt. Zum Zeitpunkt t = 0 wird der Schalter geschlossen. **ABD**
1) Ermittle den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung u_C mithilfe einer Differentialgleichung.
2) Zeige, dass sich die Kondensatorspannung langfristig der angelegten Spannung nähert.
3) Wie viel Prozent dieses Endwerts erreicht u_C nach einer Zeit von 5τ?

3.76 An ein RL-Glied, dessen Spule entladen ist, wird eine Gleichspannung U_0 angelegt. Ermittle den zeitlichen Verlauf der Stromstärke i durch Lösen der Differentialgleichung und zeige, dass sich die Stromstärke dem Wert $i = \frac{U_0}{R}$ nähert. **ABD**

3.77 Für die Ladung q eines Kondensators während des Entladevorgangs gilt: **AB**

$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot q = 0$ und $q(0) = 50\ \mu F$

1) Ermittle die Lösung q(t) der Differentialgleichung und den zeitlichen Verlauf der Stromstärke i(t). $\left(\text{Hinweis: } i(t) = C \cdot \frac{dq}{dt}\right)$
2) Stelle beide Funktionen für R = 1 kΩ und C = 1 mF grafisch dar.

3.78 An ein RL-Glied mit R = 50 Ω und L = 2 H, dessen Spule entladen ist, wird eine Gleichspannung $U_0 = 12$ V angelegt. **AB**
1) Ermittle den zeitlichen Verlauf der Stromstärke durch Lösen der Differentialgleichung.
2) Berechne u_R und u_L und stelle die Spannungsverläufe grafisch dar.

3.79 Bei einem anfangs ungeladenen RC-Glied mit dem Widerstand R und der Kapazität C wird der Schalter geschlossen. **AB**
1) Bestimme den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung u_C.
2) Stelle den Verlauf der Kondensatorspannung grafisch dar und veranschauliche den stationären Anteil der Lösung.
a) R = 20 kΩ, C = 40 μF, $u(t) = 60\ Vs^{-1} \cdot t$
b) R = 400 Ω, C = 10 μF, $u(t) = 230\ V \cdot \sin(310\ s^{-1} \cdot t)$

3.80 Bei einem ungeladenen RL-Glied mit R = 20 Ω, L = 0,4 H und der angelegten Spannung u(t) wird der Schalter zum Zeitpunkt t = 0 geschlossen. **AB**
Bestimme den zeitlichen Verlauf der Stromstärke i(t) und stelle diesen grafisch dar.
a) u(t) = 30 V **b)** $u(t) = 12\ Vs^{-1} \cdot t$ **c)** $u(t) = 230\ V \cdot \sin(50\ s^{-1} \cdot \pi \cdot t)$

3.81 An ein RL-Glied mit R = 10 Ω und L = 2 H wird eine Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ mit $\hat{u} = 150$ V und $\omega = 200\ s^{-1}$ angelegt. **ABC**
1) Ermittle die Lösung i(t) der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung i(0) = 0.
2) Stelle den flüchtigen und den stationären Lösungsanteil in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.
3) Stelle die allgemeine Lösung grafisch dar und interpretiere deren Verlauf im Sachzusammenhang.

3.82 An ein RC-Glied mit R = 2 kΩ und C = 0,5 mF wird eine Wechselspannung $u(t) = 115\ V \cdot \sin(100\ s^{-1} \cdot t)$ angelegt. **ABC**
Ermittle den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung, wenn der Kondensator beim Schließen des Schalters
1) ungeladen ist. **2)** eine Anfangsspannung von $u_C(0) = 20$ V aufweist.
3) Stelle $u_C(t)$ für beide Fälle grafisch dar und interpretiere den Einfluss der Anfangsspannung auf die Einschwingzeit t ($t = 5\tau$).

3.5 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Zahlreichen Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik liegen Differentialgleichungen 2. Ordnung zugrunde. Sie treten in Bereichen der Flüssigkeitsmechanik, bei mechanischen Schwingungen, elektrischen Schwingkreisen oder bei Wellenbewegungen auf. Viele der genannten physikalischen Phänomene können durch **lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffzienten** beschrieben werden.

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Homogene Differentialgleichung: $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$ bzw. $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$

Inhomogene Differentialgleichung: $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = s(x)$ bzw. $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x)$

$s(x)$ … Störfunktion

Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Zur Lösung einer Differentialgleichung $y'' + \mathbf{p} \cdot y' + \mathbf{q} \cdot y = 0$ eignet sich der aus Abschnitt 3.4 bekannte **Exponentialansatz** $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $C \neq 0$:

$y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$y' = C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$y'' = C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$

- Da in der Differentialgleichung auch die zweite Ableitung der unbekannten Funktion vorkommt, muss y zweimal abgeleitet werden.

$C \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + \mathbf{p} \cdot C \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + \mathbf{q} \cdot C \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0$

- Einsetzen der Funktionen in die Gleichung

$C \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot (\lambda^2 + \mathbf{p} \cdot \lambda + \mathbf{q}) = 0$

- Herausheben von $C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ und dividieren

$\lambda^2 + \mathbf{p} \cdot \lambda + \mathbf{q} = 0$

- Man erhält eine quadratische Gleichung mit der Variablen λ.

Diese Gleichung hat die gleichen Koeffizienten wie die Differentialgleichung und wird als **charakteristische Gleichung** bezeichnet. Sie hat folgende Lösungen:

$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $\lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Sowohl $y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$ als auch $y_2 = C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ sind Lösungen der Differentialgleichung. Durch Einsetzen erkennt man, dass auch jede Linearkombination $y = a \cdot y_1 + b \cdot y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung ist ($a, b \in \mathbb{C}$).

Für homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gilt:

Jede **Linearkombination von Lösungen** der Differentialgleichung ist wieder eine **Lösung** der Differentialglgeichung: $y = a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \ldots + a_n \cdot y_n$ $(a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$

Je nach Wert der Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ werden drei Fälle für die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten unterschieden. Im Folgenden werden diese Fälle anhand von konkreten Beispielen untersucht.

- **Diskriminante D > 0**

$y'' + \mathbf{3}y' + \mathbf{2}y = 0 \Rightarrow$ Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \mathbf{3} \cdot \lambda + \mathbf{2} = 0$

Man erhält **zwei reelle Lösungen**: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$

Daraus ergeben sich zwei Lösungen der Differentialgleichung: $y_1 = C_1 \cdot e^{-x}$ und $y_2 = C_2 \cdot e^{-2x}$
$y = y_1 + y_2 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}$

Diese Lösung enthält zwei Konstanten C_1 und C_2 und ist damit eine zweiparametrige Funktionenschar.

- **Diskriminante D = 0**

$y'' + \mathbf{6}y' + \mathbf{9}y = 0 \Rightarrow$ Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \mathbf{6} \cdot \lambda + \mathbf{9} = 0$

Man erhält **eine reelle Doppellösung**: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

Die Lösung $y_1 = C_1 \cdot e^{-3x}$ ist nur einparametrig. Da die Lösung eine zweiparametrige Funktionenschar sein muss, kann die einparametrige Funktionenschar y_1 nicht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sein. Man kann zum Beispiel durch **Variation der Konstanten** zeigen, dass eine weitere Lösung $y_2 = C_2 \cdot x \cdot e^{-3x}$ existiert.
Somit erhält man: $y = y_1 + y_2 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-3x} = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-3x}$

- **Diskriminante D < 0**

$y'' + \mathbf{6}y' + \mathbf{13} = 0 \Rightarrow$ Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \mathbf{6} \cdot \lambda + \mathbf{13} = 0$

Man erhält **zwei konjugiert komplexe Lösungen**: $\lambda_1 = -3 + 2j$ und $\lambda_2 = -3 - 2j$

Daraus ergeben sich zwei spezielle komplexe Lösungen: $y_1 = e^{(-3 + 2j) \cdot x}$ und $y_2 = e^{(-3 - 2j) \cdot x}$

Mithilfe der Euler'schen Formel $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$ kann man die Lösungen in folgender Form angeben:

$y_1 = e^{-3x} \cdot [\cos(2x) + j \cdot \sin(2x)]$
$y_2 = e^{-3x} \cdot [\cos(-2x) + j \cdot \sin(-2x)] = e^{-3x} \cdot [\cos(2x) - j \cdot \sin(2x)]$

Um eine reelle Lösung zu ermitteln, wird eine geeignete Linearkombination der beiden Lösungen so gebildet, dass die imaginären Anteile wegfallen:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{2} \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{-3x} \cdot [\cos(2x) + j \cdot \sin(2x)] \\ \text{II:} & \frac{1}{2} \cdot y_2 = \frac{1}{2} \cdot e^{-3x} \cdot [\cos(2x) - j \cdot \sin(2x)] \\ \hline & \overline{y}_1 = e^{-3x} \cdot \cos(2x) \end{array} \quad +$$

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{2} \cdot (-j) \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{-3x} \cdot [(-j) \cdot \cos(2x) + \sin(2x)] \\ \text{II:} & \frac{1}{2} \cdot j \cdot y_2 = \frac{1}{2} \cdot e^{-3x} \cdot [j \cdot \cos(2x) + \sin(2x)] \\ \hline & \overline{y}_2 = e^{-3x} \cdot \sin(2x) \end{array} \quad +$$

Die allgemeine Lösung y erhält man durch Bilden aller möglichen Linearkombinationen von $\overline{y}_1$ und $\overline{y}_2$:

$y = C_1 \cdot e^{-3x} \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot e^{-3x} \cdot \sin(2x) = e^{-3x} \cdot (C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x))$

Differentialgleichungen

Allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form $\mathbf{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0}$

Durch den **Exponentialansatz** $y = C \cdot e^{\lambda x}$ erhält man die **charakteristische Gleichung**:
$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$; D … Diskriminante

- **D > 0** $\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}: y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$
- **D = 0** $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}: y = e^{\lambda \cdot x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$
- **D < 0** $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot j \in \mathbb{C}: y = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x))$

Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie bei einer inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung gilt:

- Die Lösung ist die Summe aus der homogenen und einer partikulären Lösung: $y = y_h + y_p$
- Die partikuläre Lösung kann mithilfe von speziellen Lösungsansätzen ermittelt werden, die vom selben Typ wie die Störfunktion s(x) ist.

Die folgende Tabelle zeigt einige **Lösungsansätze für die partikuläre Lösung y_p** der Differentialgleichung $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x)$:

Störfunktion s(x)	Lösungsansatz für y_p
Konstante Funktion: $s(x) = a$	$y_p = A$
Lineare Funktion: $s(x) = a \cdot x + b$	$y_p = A \cdot x + B$
Polynomfunktion vom Grad n	$y_p = A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + A_0$ für $q \neq 0$ $y_p = x \cdot (A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + A_0)$ für $p \neq 0, q = 0$ $y_p = x^2 \cdot (A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + A_0)$ für $p = q = 0$
Winkelfunktion: $s(x) = a \cdot \sin(\omega x) + b \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$ für $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j \cdot \beta$ $y_p = x \cdot [A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)]$ für $\lambda_{1,2} = \pm j \cdot \beta$ und $\beta = \omega$
Exponentialfunktion: $s(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$	$y_p = A \cdot e^{b \cdot x}$ für $\lambda_{1,2} \neq b$ $y_p = A \cdot x \cdot e^{b \cdot x}$ für $\lambda_1 = b$ und $\lambda_2 \neq b$ $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{b \cdot x}$ für $\lambda_1 = \lambda_2 = b$

B **3.83** Löse die inhomogene Differentialgleichung $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-2x}$.

Lösung:

$y'' + 5y' + 6y = 0$ • Homogene Differentialgleichung

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$ • Charakteristische Gleichung

$y_h = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-2x}$ • Homogene Lösung

$y_p = A \cdot x \cdot e^{-2x}$
$y_p' = A \cdot e^{-2x} - 2A \cdot x \cdot e^{-2x}$
$y_p'' = -4A \cdot e^{-2x} + 4A \cdot x \cdot e^{-2x}$

• Zur Ermittlung der partikulären Lösung wird der Lösungsansatz $y_p = A \cdot x \cdot e^{b \cdot x}$ gewählt, da $b = -2$ eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung ist, also e^{-2x} schon Bestandteil der homogenen Lösung ist.

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$-4A \cdot e^{-2x} + 4A \cdot x \cdot e^{-2x} + 5A \cdot e^{-2x} - 10A \cdot x \cdot e^{-2x} + 6A \cdot x \cdot e^{-2x} = 2 \cdot e^{-2x}$$
$$A \cdot e^{-2x} = 2 \cdot e^{-2x} \Rightarrow A = 2$$

$y_p = 2x \cdot e^{-2x}$ • Partikuläre Lösung

$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x} + 2x \cdot e^{-2x}$ • Allgemeine Lösung $y = y_h + y_p$

3.84 Löse die Anfangswertaufgabe $y'' + 3y' - 10y = 20t + 4$ mit $y(0) = 9$ und $y'(0) = 11$. **B**

Lösung:

$y'' + 3y' - 10y = 0$	• Homogene Differentialgleichung
$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 2$	• Charakteristische Gleichung
$y_h = C_1 \cdot e^{-5t} + C_2 \cdot e^{2t}$	• Homogene Lösung
$y_p = A_1 \cdot t + A_2$ $y_p' = A_1$ $y_p'' = 0$	• Linearer Ansatz für die partikuläre Lösung, da die Störfunktion s(t) eine lineare Funktion ist.
$0 + 3 \cdot A_1 - 10 \cdot (A_1 \cdot t + A_2) = 20t + 4$	• Einsetzen in die Differentialgleichung
$-10A_1 \cdot t + (3A_1 - 10A_2) = 20 \cdot t + 4$ t^1: $-10A_1 = 20 \Rightarrow A_1 = -2$ t^0: $3 \cdot (-2) - 10A_2 = 4 \Rightarrow A_2 = -1$	• Koeffizientenvergleich
$y_p = -2t - 1$	• Partikuläre Lösung
$y = C_1 \cdot e^{-5t} + C_2 \cdot e^{2t} - 2t - 1$	• Allgemeine Lösung
$y' = -5C_1 \cdot e^{-5t} + 2C_2 \cdot e^{2t} - 2$	• Erste Ableitung der allgemeinen Lösung
$y(0) = 9 \Rightarrow$ I: $C_1 + C_2 = 10$ $y'(0) = 11 \Rightarrow$ II: $-5C_1 + 2C_2 = 13$ $C_1 = 1,\ C_2 = 9$	• Gleichungssystem zum Ermitteln der Konstanten C_1 und C_2
$y(t) = e^{-5t} + 9 \cdot e^{2t} - 2t - 1$	• Spezielle Lösung

3.85 Stelle jeweils die charakteristische Gleichung in der Form $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$ auf. **A**

1) $2y'' + 3y' + y = 0$ ***2)*** $4y'' + 3y = \sin(x)$ ***3)*** $5y'' + 2y' = 2x$

Aufgaben 3.86 - 3.88: Ermittle die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

3.86 ***a)*** $y'' + 2y' - 3y = 0$ ***b)*** $y'' - 4y' + 4y = 0$ ***c)*** $y'' + 2y' + 5y = 0$ **B**

3.87 ***a)*** $y'' + 7y' + 10y = 0$ ***b)*** $y'' + 10y' + 25y = 0$ ***c)*** $y'' + y = 0$ **B**

3.88 ***a)*** $y'' - 6y' + 9y = 0$ ***b)*** $y'' - 6y' + 25y = 0$ ***c)*** $y'' - 4y = 0$ **B**

Aufgaben 3.89 – 3.90: Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

3.89 ***a)*** $y'' + 4y' + 3y = 3 \cdot e^{2x}$ ***b)*** $y'' + 4y' = 2 \cdot e^{-4x}$ ***c)*** $y'' - 12y' + 36y = 3 \cdot e^{-2x}$ **B**

3.90 ***a)*** $y'' - 2y' = 2x^3 - 2x + 1$ ***b)*** $y'' + 5y' = x^2 + 3x - 4$ ***c)*** $y'' + 7y' - 12y = 5 \cdot e^{5x}$ **B**

Aufgaben 3.91 – 3.92: Ermittle die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

3.91 ***a)*** $y'' + 4y' + 5y = 60 \cdot \sin(2x)$; $y(0) = y'(0) = 0$ ***b)*** $y'' + 4y = 130 \cdot \sin(2x)$; $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$ **B**

3.92 ***a)*** $y'' - 2y' + 5y = 2 \cdot e^{3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ ***b)*** $y'' + 2y' + y = 4 \cdot e^{-x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 6$ **B**

3.93 Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung $y'' - 3y' + 25y = 0$ hat zwei konjugiert komplexe Lösungen. **ABD**

1) Stelle die charakteristische Gleichung auf und ermittle diese Lösungen.

2) Ermittle die komplexen Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung mithilfe der Euler'schen Formel $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$.

3) Zeige, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von y Lösungen der angegebenen Differentialgleichung sind.

3.6 Anwendungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

3.6.1 Mechanische Schwingungen

Bei der Konstruktion und der Herstellung von Fahrzeugen oder Maschinen ist es notwendig, deren Eigenschaften im Betrieb vorauszuberechnen. Beobachtet man beispielsweise den Schleudervorgang einer Waschmaschine, so erkennt man, dass aufgrund der Rotation der Wäschetrommel das ganze Gerät zu schwingen beginnt. Auch bei der Konstruktion von Stoßdämpfern bei Fahrzeugen ist es wichtig, deren Schwingungsverhalten zu analysieren. Schwingungsvorgänge lassen sich durch Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben.

Freie Schwingungen

Um den Verlauf einer Schwingung zu untersuchen, wird zumeist ein Feder-Masse-System als vereinfachtes Modell für ein schwingungsfähiges mechanisches System verwendet:

Eine Masse m ist an einer Schraubenfeder befestigt. Wird keine zusätzliche Kraft ausgeübt, so befindet sich das System aufgrund des Eigengewichts der Masse in der **Ruhelage** $y(0\,s) = 0\,m$.

- Wird die Masse ausgelenkt, so gibt es eine **Rückstellkraft** $F_y(t)$, die die Feder zu jedem beliebigen Zeitpunkt t in die Ruhelage zurückdrängt:

  $F_y(t) = -k \cdot y(t)$ mit k … Federkonstante
  $y(t)$ … momentane Auslenkung zum Zeitpunkt t

- Wird das Feder-Masse-System zum Beispiel durch ein zähes Medium **gedämpft**, tritt bei der Schwingung zusätzlich eine Reibungskraft auf, die der Bewegung entgegenwirkt und diese dadurch abbremst. Diese Reibungskraft F_R ist zu jedem Zeitpunkt proportional zur Geschwindigkeit $v(t) = \dot{y}$:
  $F_R(t) = -b \cdot v(t) = -b \cdot \dot{y}$ mit b … Reibungskoeffizient

- Da eine schwingende Masse zu jedem Zeitpunkt im Kräftegleichgewicht ist, muss die Gesamtkraft F(t), die auf das System wirkt, gleich groß wie die Summe der einwirkenden Kräfte F_y und F_R sein. Nach dem **dynamischen Kraftgesetz** gilt:
  $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y}$

- Für die **Kräftebilanz** folgt daraus: $F = F_R + F_y$
  $m \cdot \ddot{y} = -b \cdot \dot{y} - k \cdot y$ bzw. $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie wird auch als **allgemeine Schwingungsgleichung** der Mechanik bezeichnet. Da nach dem Auslenken der Masse keine äußere Kraft F auf das System wirkt, handelt es sich um eine **freie Schwingung**, die Differentialgleichung ist homogen.

Schwingungsgleichung einer freien Schwingung
$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$ mit m … Masse, b … Reibungskoeffizient, k … Federkonstante

ABC

3.94 Bei einem ungedämpften schwingungsfähigen System mit der Masse m = 10 kg und der Federkonstante $k = 360\,\frac{N}{m}$ wird die Masse zum Zeitpunkt t = 0 s aus der Ruhelage um 5 cm nach oben ausgelenkt.

1) Stelle die Differentialgleichung auf und löse das Anfangswertproblem. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

2) Stelle die Funktion grafisch dar und interpretiere den Verlauf.

Lösung:

1) Die allgemeine Schwingungsgleichung lautet: $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$

Da die Schwingung ungedämpft ist, hat der Reibungskoeffizient den Wert $b = 0\,\frac{kg}{s}$.

Einsetzen der Werte für m und k: $10 \cdot \ddot{y} + 360 \cdot y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 36 = 0$

Ich löse die Gleichung und erhalte zwei komplexe Lösungen $\lambda_1 = 6j$ und $\lambda_2 = -6j$.

Der Realteil der Lösungen hat den Wert 0.

Allgemeine Lösung: $y(t) = C_1 \cdot \sin(6t) + C_2 \cdot \cos(6t)$

Anfangsbedingungen: $y(0) = 0{,}05$ m, da um 5 cm nach oben ausgelenkt wird.

$\dot{y}(0) = 0\,\frac{m}{s}$, da keine Geschwindigkeit mitgegeben wird.

Erste Ableitung der allgemeinen Lösung: $\dot{y}(t) = 6C_1 \cdot \sin(6t) - 6C_2 \cdot \cos(6t)$

Zum Ermitteln der Konstanten stelle ich ein Gleichungssystem auf:

$y(0) = 0{,}05: \quad \Rightarrow \quad \text{I:} \quad C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0) = 0{,}05$

$\dot{y}(0) = 0: \quad \Rightarrow \quad \text{II:} \quad 6C_1 \cdot \cos(0) - 6C_2 \cdot \sin(0) = 0$

Spezielle Lösung: $y(t) = 0{,}05\text{ m} \cdot \cos(6\text{ s}^{-1} \cdot t)$

2) Grafische Darstellung:

Die Kurve entspricht der einer Cosinusfunktion. Man erkennt, dass die Schwingung ungedämpft ist, da sich die Amplitude nicht verändert.

Anhand der Kenntnis von zusätzlichen Zusammenhängen aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht lässt sich die allgemeine Schwingungsgleichung $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$ auch in anderer Form darstellen:

- Die **Dämpfungskonstante** δ ist durch die Gleichung $\delta = \frac{b}{2m}$ bzw. $\mathbf{2\delta = \frac{b}{m}}$ bestimmt. Sie wird auch als **Abklingkonstante** bezeichnet und hat die Einheit s^{-1} („pro Sekunde").
- Für die **Eigenkreisfrequenz** (**Kreisfrequenz**) ω_0 gilt: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ bzw. $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$.

  ω_0 ist jene Kreisfrequenz, mit der das ungedämpfte System schwingt.

Das Verhältnis zwischen der Dämpfungskonstanten δ und der Eigenkreisfrequenz ω_0 wird **Dämpungsgrad** D genannt: $D = \frac{\delta}{\omega_0}$

Dividiert man die Schwingungsgleichung auf beiden Seiten durch die Masse m, erhält man:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Man ersetzt die Koeffizienten durch obige Zusammenhänge und erhält folgende Gleichung:

$$\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

Differentialgleichungen

Die **charakteristische Gleichung** der Differentialgleichung $\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + {\omega_0}^2 \cdot y = 0$ ist $\lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + {\omega_0}^2 = 0$ und hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$.

Die Art der Lösung hängt, wie bei allen Differentialgleichungen 2. Ordnung, von der Diskriminanten $\delta^2 - {\omega_0}^2$ ab. Man unterscheidet drei Fälle (vgl. Seite 73):

- **Kriechfall** (**aperiodische Schwingung**): $\delta > \omega_0 \Rightarrow$ Dämpfungsgrad $D > 1$

  Man erhält zwei verschiedene reelle Lösungen:
  $\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$ und $\lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$
  Da $\sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2} < \delta$ ist, sind beide Lösungen negativ.

  Allgemeine Lösung: $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$

ABC **3.95** Bei einem schwingungsfähigen System mit der Masse m = 10 kg wird die Masse zum Zeitpunkt t = 0 s aus der Ruhelage mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $0{,}65\,\frac{m}{s}$ nach oben ausgelenkt. Das System weist einen Reibungskoeffizienten $b = 95\,\frac{kg}{s}$ und eine Federkonstante $k = 120\,\frac{N}{m}$ auf.

1) Löse die Differentialgleichung, die diesen Vorgang beschreibt.
2) Stelle die Lösungsfunktion grafisch dar und beschreibe ihren Verlauf.

Lösung:

1) $2\delta = \frac{95\,\frac{kg}{s}}{10\,kg} = 9{,}5\,s^{-1}$; $\omega_0^2 = \frac{120\,\frac{N}{m}}{10\,kg} = 12\,s^{-2}$ — • Ermittlung der Koeffizienten

$\ddot{y} + 9{,}5 \cdot \dot{y} + 12 \cdot y = 0$ — • Schwingungsgleichung

$\lambda^2 + 9{,}5 \cdot \lambda + 12 = 0$ — • Charakteristische Gleichung

$\Rightarrow \lambda_1 = -8;\ \lambda_2 = -1{,}5$

$y(t) = C_1 \cdot e^{-8t} + C_2 \cdot e^{-1{,}5t}$ — • Allgemeine Lösung

$\dot{y}(t) = -8C_1 \cdot e^{-8t} - 1{,}5C_2 \cdot e^{-1{,}5t}$ — • 1. Ableitung

$y(0) = 0: \Rightarrow$ I: $C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$ — • Gleichungssystem zum Ermitteln von C_1 und C_2

$y'(0) = 0{,}65: \Rightarrow$ II: $-8C_1 \cdot e^0 - 1{,}5C_2 \cdot e^0 = 0{,}65$

$8C_2 - 1{,}5C_2 = 0{,}65 \Rightarrow C_2 = 0{,}1$

$y(t) = -0{,}1 \cdot e^{-8t} + 0{,}1 \cdot e^{-1{,}5t} = 0{,}1 \cdot (e^{-1{,}5t} - e^{-8t})$ — • Spezielle Lösung

$y(t) = 0{,}1\,m \cdot (e^{-1{,}5\,s^{-1} \cdot t} - e^{-8\,s^{-1} \cdot t})$

2) Grafische Darstellung:

Die Masse bewegt sich aus der Ruhelage, erreicht eine maximale Auslenkung und kehrt asymptotisch in die Ruhelage zurück.

- **Gedämpfte Schwingung**: $\delta < \omega_0 \Rightarrow$ Dämpfungsgrad $D < 1$
  Man erhält zwei konjugiert komplexe Lösungen:
  $\lambda_1 = -\delta - j \cdot \sqrt{|\delta^2 - \omega_0^2|} = -\delta - j \cdot \omega_d$ und $\lambda_2 = -\delta + j \cdot \sqrt{|\delta^2 - \omega_0^2|} = -\delta + j \cdot \omega_d$
  ω_d ... Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung
  Allgemeine Lösung: $y(t) = C_1 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)$

  Es liegt eine gedämpfte Schwingung vor. Die Schwingungsamplituden $C_1 \cdot e^{-\delta t}$ bzw. $C_2 \cdot e^{-\delta t}$ verringern sich aufgrund der Dämpfung exponentiell.

3.96 Löse die Differentialgleichung für das Feder-Masse-System mit $m = 50$ kg, $b = 20\,\frac{kg}{s}$ und $k = 100\,\frac{N}{m}$ für die Anfangsbedingung $y(0\text{ s}) = 0$ m und $\dot{y}(0\text{ s}) = 0{,}1\,\frac{m}{s}$. Stelle das Schwingungsverhalten grafisch dar.

B

Lösung:

$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{20}{2 \cdot 50} = \frac{1}{5}\,s^{-1} = 0{,}2\,s^{-1}$ • Berechnen von δ und ω_0^2

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{100}{50} = 2\,s^{-2}$ • $\delta < \omega_0 \Rightarrow$ gedämpfte Schwingung

$\ddot{y} + 0{,}4\dot{y} + 2y = 0$ • Homogene Schwingungsgleichung

$\lambda^2 + 0{,}4\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = -0{,}2 + 1{,}4j$ und $\lambda_2 = -0{,}2 - 1{,}4j$ • Konjugiert komplexe Lösungen

$y(t) = C_1 \cdot e^{-0{,}2t} \cdot \sin(1{,}4t) + C_2 \cdot e^{-0{,}2t} \cdot \cos(1{,}4t)$ • Allgemeine Lösung

$\dot{y}(t) = -0{,}2C_1 \cdot e^{-0{,}2t} \cdot \sin(1{,}4t) + 1{,}4C_1 \cdot e^{-0{,}2t} \cdot \cos(1{,}4t)$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ • Einsetzen der Anfangsbedingung

$\dot{y}(0) = 0{,}1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{14}$

$y(t) = \frac{1}{14}\,m \cdot e^{-0{,}2t} \cdot \sin\left(1{,}4\,s^{-1} \cdot t\right)$

Grafische Darstellung:

- **Aperiodischer Grenzfall**: $\delta = \omega_0 \Rightarrow$ Dämpfungsgrad $D = 1$
  Durch Lösen der charakteristischen Gleichung erhält man eine reelle negative Doppellösung:
  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

  Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:
  $y(t) = C_1 \cdot e^{-\delta t} + C_2 t \cdot e^{-\delta t}$

  Dieses Schwingungsverhalten wird als aperiodischer Grenzfall bezeichnet. Das System bewegt sich aperiodisch aus der Anfangsposition heraus und nähert sich im Laufe der Zeit asymptotisch der Ruhelage. Das Schwingungsverhalten stellt einen Grenzfall zwischen den periodischen und aperiodischen Schwingungen dar.

Differentialgleichungen

Schwingungsgleichung einer freien mechanischen Schwingung

Die Differentialgleichung für die Auslenkung y lautet:

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^{\,2} \cdot y = 0 \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ … Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

$\delta = \frac{b}{2m}$ … Abklingkonstante; $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ … Dämpfungsgrad

Die Lösung hängt von der Diskriminanten $\delta^2 - \omega_0^{\,2}$ der charakteristischen Gleichung bzw. vom Dämpfungsgrad D ab.

- **Kriechfall:** $\delta > \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D > 1$
  $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- **Aperiodischer Grenzfall:** $\delta = \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D = 1$
  $y(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t)$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$
- **Gedämpfte Schwingung:** $\delta < \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D < 1$
  $y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t))$ mit $\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$
  ω_d … Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung

AC **3.97** Gib an, welche Anfangsbedingungen durch die folgenden Texte beschrieben werden.
1) Ein System wird aus der Ruhelage mit einer Geschwindigkeit von $2\,\frac{m}{s}$ ausgelenkt.
2) Ein System wird um 5 cm zusammengedrückt und losgelassen.
3) Eine hängende Feder wird um 3 cm nach unten gezogen und durch einen Stoß mit einer Geschwindigkeit von $3\,\frac{m}{s}$ nach oben in Bewegung versetzt.

BC **3.98** Löse die Schwingungsgleichung und gib den Schwingfall an.
a) $\ddot{y} + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$
b) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 29y = 0$; $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -2$

ABC **3.99** Ein Feder-Masse-System mit der Masse m = 5 kg und der Federkonstanten $k = 50\,\frac{N}{m}$ mit $y(0\,s) = 0{,}16\,m$, $\dot{y}(0\,s) = -1\,\frac{m}{s}$ kann frei von äußeren Kräften schwingen.
1) Ermittle die Lösung der Anfangswertaufgabe.
2) Stelle den Schwingungsverlauf grafisch dar und interpretiere die Anfangsbedingungen anhand der Zeichnung.

BCD **3.100** **1)** Löse die Differentialgleichung für ein Feder-Masse-System mit m = 10 kg, $b = 120\,\frac{kg}{s}$ und $k = 360\,\frac{N}{m}$ jeweils mit den Anfangsbedingungen $y(0\,s) = 4\,cm$ und $\dot{y}(0\,s) = 0\,\frac{m}{s}$ bzw. $y(0\,s) = 5\,cm$ und $\dot{y}(0\,s) = 0\,\frac{m}{s}$.
2) Stelle beide Schwingungen grafisch dar und vergleiche ihre Verläufe.

ABC **3.101** Ein Feder-Masse-System hat eine Masse von 8 kg und die Federkonstante $k = 7\,840\,\frac{N}{m}$. Es ist mit einer Dämpfungsvorrichtung verbunden, die den Reibungskoeffizienten $b = 30\,\frac{kg}{s}$ aufweist.
1) Gib die Schwingungsgleichung dieses Systems und die Art der Schwingung an.
2) Berechne die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung.
3) Ermittle eine spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $y(0\,s) = 0\,m$ und $v(0\,s) = 0{,}125\,\frac{m}{s}$ und stelle den Schwingungsverlauf grafisch dar.

AB **3.102** Ein schwingungsfähiges Feder-Masse-System hat die Masse m = 5 kg, die Federkonstante $k = 1\,625\,\frac{N}{m}$ und die Reibungskonstante b.
1) Bestimme b so, dass der aperiodische Grenzfall auftritt.
2) Ermittle den Bewegungsverlauf y(t) und bestimme die maximale Auslenkung, wenn die Feder mit $v_0 = 2\,\frac{m}{s}$ aus der Ruhelage bewegt wird.

Erzwungene Schwingungen

Wenn auf ein mechanisches System von außen eine Kraft F(t) wirkt, spricht man von einer **erzwungenen Schwingung**. Die Schwingungsgleichung entspricht einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form:

$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F(t)$ bzw. $\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = \frac{F(t)}{m}$

ZB: Es soll das Schwingungsverhalten eines gedämpften Feder-Masse-Systems mit m = 1 kg, $b = 4\,\frac{kg}{s}$ und $k = 5\,\frac{N}{m}$, das durch eine konstante Kraft F(t) = 6 N angeregt wird, untersucht werden.

Die Schwingungsgleichung lautet $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 6$.

Zunächst wird die homogene Differentialgleichung $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$ gelöst:

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$	• Charakteristische Gleichung
$\lambda_1 = -2 + j;\ \ \lambda_2 = -2 - j$	• Man erhält zwei konjugiert komplexe Lösungen.
$y_h = C_1 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t) + C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t)$	• Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

Um eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung zu ermitteln, wird ein konstanter Ansatz verwendet, da das System von einer konstanten Kraft angeregt wird.

$y_p = A;\ \ \dot{y}_p = 0,\ \ddot{y}_p = 0$	• Ansatz für die konstante Störfunktion und zweimaliges Ableiten
$5A = 6 \Rightarrow A = 1{,}2$	• Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung

Die Lösung der Differentialgleichung erhält man durch Addition von y_h und y_p:

$y(t) = C_1 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t) + C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t) + 1{,}2$

Verwendet man die Anfangsbedingungen y(0) = 0 m und $\dot{y}(0) = 0\,\frac{m}{s}$, so erhält man für $C_1 = -2{,}4$ und für $C_2 = -1{,}2$.

Somit erhält man die Lösung der Differentialgleichung:

$$y(t) = \underbrace{-2{,}4 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t) - 1{,}2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t)}_{\text{flüchtige Lösung } y_h} + \underbrace{1{,}2}_{\text{stationäre Lösung } y_p}$$

Aufgrund der Dämpfung enthält die homogene Lösung den Faktor $e^{-\delta t}$. Daher wird die homogene Lösung für $t \to \infty$ vernachlässigbar klein, man bezeichnet sie daher als **flüchtige Lösung**. Die Bewegung des Systems wird also langfristig gesehen nur durch die partikuläre Lösung beschrieben, die daher als **stationäre Lösung** bezeichnet wird. Bei einer gedämpften Schwingung stellt sich das System daher auf einen neuen Gleichgewichtszustand ein, in diesem Beispiel auf $y_p = 1{,}2$.

Schwingungsgleichung einer erzwungenen Schwingung

$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F(t)$ bzw. $\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = \frac{F(t)}{m}$

mit F(t) … von außen wirkende Kraft

Resonanz

CD **3.103** Eine der größten Hängebrücken der Welt – die Tacoma Narrows-Bridge – wurde am 7. November 1940 im US-Bundesstaat Washington eröffnet. Vier Monate später stürzte die Brücke jedoch ein.
1) Suche im Internet nach einem Video des Einsturzes.
2) Überlege und beschreibe, wie es zu diesem Einsturz kam.

Wird eine gedämpfte Schwingung mit einer periodischen Kraft von außen angeregt, so wird die Gesamtbewegung als Resultierende zweier periodischer Bewegungen mit unterschiedlichen Frequenzen und Amplituden beschrieben. Die Differentialgleichung lautet:

$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F \cdot \sin(\omega t)$ bzw. $\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^{\,2} \cdot y = \frac{F}{m} \cdot \sin(\omega t)$

Handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung, ist also $\delta < \omega_0$, erhält man aus der charakteristischen Gleichung zwei konjugiert komplexe Lösungen und somit folgende allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$y_h(t) = C_1 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$ mit $\omega_d = \sqrt{|\delta^2 - \omega_0^{\,2}|}$

Betrachtet man das Schwingungsverhalten anhand der homogenen Lösung für $t \to \infty$, so geht die Amplitude der Schwingung gegen null. Dies gilt auch für den aperiodischen Grenzfall und den Kriechfall. Daher ist für das Schwingungsverhalten langfristig gesehen nur die partikuläre (stationäre) Lösung ausschlaggebend, die nur von der Störfunktion abhängt. Diese partikuläre Lösung wird nun allgemein bestimmt und untersucht.

Für die partikuläre Lösung wählt man den Ansatz $y_p = \mathbf{a} \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{b} \cdot \cos(\omega t)$. Leitet man y_p zweimal ab und setzt diese Funktionen in die inhomogene Differentialgleichung ein, erhält man mittels Koeffizientenvergleich die Koeffizienten **a** und **b**.

Um $y_p = \mathbf{a} \cdot \sin(\omega t) + \mathbf{b} \cdot \cos(\omega t)$ als Sinusschwingung $y_p = \mathbf{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ darzustellen, kann man ein Zeigerdiagramm verwenden (vgl. Band 2, Abschnitt 5.4.1). Daraus ergibt sich für die Amplitude $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ und für den Phasenwinkel $\tan(\varphi) = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$.

Durch Einsetzen von a und b erhält man:

$$A = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad \text{und } \tan(\varphi) = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^{\,2} - \omega^2}$$

Die Amplitude der stationären Lösung hängt von der Kreisfrequenz ω der Störfunktion ab. Je kleiner der Unterschied zwischen der Erregerkreisfrequenz ω und der Eigenkreisfrequenz ω_0 ist, desto größer wird die Amplitude der resultierenden Schwingung. Die Abhängigkeit der Amplitude von der Frequenz der Erregerfunktion wird als **Frequenzgang der Amplitude** $A(\omega)$ bezeichnet. Das Erreichen der **maximalen Amplitude** wird als **Resonanz** bezeichnet, die zugehörige Frequenz als **Resonanzkreisfrequenz**.

Beim Erreichen der Resonanzkreisfrequenz muss die Funktion $A(\omega) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ maximal sein. Das Maximum dieser Funktion ergibt sich, wenn der Nenner, also der Radikand $R(\omega) = (\omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$, minimal ist. Durch Nullsetzen der 1. Ableitung $R'(\omega)$ erhält man die **Resonanzkreisfrequenz** $\omega_r = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2}$ (siehe Aufgabe 3.108).

Im Fall einer Dämpfung gilt für die Resonanzkreisfrequenz $\omega_r < \omega_d < \omega_0$. Stimmt die Erregerkreisfrequenz ω mit der Resonanzkreisfrequenz ω_r überein, so schwingt das mechanische System mit größtmöglicher Amplitude.

In der nebenstehenden Abbildung ist der Frequenzgang der Amplitude bei verschiedenen Dämpfungskonstanten δ dargestellt. Bei ungedämpften Schwingungen ($\delta = 0$) kann es zur **Resonanzkatastrophe** kommen, die Amplitude wäre unendlich groß.

Frequenzgang der Amplitude: $A(\omega) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$

Resonanzkreisfrequenz: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

3.104 Ein Feder-Masse-System hat die Masse m = 5 kg, die Federkonstante $k = 1\,625\,\frac{N}{m}$ und die Reibungskonstante $b = 100\,\frac{kg}{s}$. Zum Zeitpunkt t = 0 s wird das System aus der Ruhelage durch eine konstante Kraft F(t) = 400 N zum Schwingen angeregt. ABC

1) Bestimme den Bewegungsverlauf y und die maximale Auslenkung.
2) Gib die stationäre Lösung an.
3) Berechne, mit welcher Kraft das System angeregt werden muss, damit die Feder in einer Höhe von 25 cm im Gleichgewichtszustand ist.

3.105 Ein Feder-Masse-System hat die Masse m = 5 kg, die Federkonstante $k = 1\,625\,\frac{N}{m}$ und eine Reibungskonstante $b = 100\,\frac{kg}{s}$. Zum Zeitpunkt t = 0 s wird das System durch eine sinusförmige Kraft $F(t) = 520\,N \cdot \sin(4\,s^{-1} \cdot t)$ aus der Ruhelage zum Schwingen angeregt. ABC

1) Bestimme den Bewegungsverlauf y und die stationäre Lösung.
2) Stelle y und die stationäre Lösung grafisch dar. Ermittle, nach wie vielen Sekunden sich die Schwingung nicht mehr erkennbar von der stationären Lösung unterscheidet.
3) Berechne die Resonanzkreisfrequenz und die maximale Amplitude.

3.106 Ein mechanisches schwingungsfähiges System ohne Dämpfung hat eine Masse von m = 2 kg. Die Federkonstante k beträgt $490\,\frac{N}{m}$. Das System wird von einer äußeren periodischen Kraft $F(t) = 10\,N \cdot \sin(3\,s^{-1} \cdot t)$ angeregt. ABC

1) Stelle die Schwingungsgleichung für dieses mechanische System auf.
2) Berechne die allgemeine Lösung.
3) Bestimme den Wert von ω, bei dem Resonanz auftritt.
4) Stelle die Schwingung für $\omega = \omega_r$ grafisch dar und beschreibe den Verlauf.

3.107 Ein System hat eine Masse m = 20 kg, die an einer elastischen Feder mit der Federkonstanten $k = 4\,080\,\frac{N}{m}$ befestigt ist. Das System hat einen Reibungskoeffizienten $b = 800\,\frac{kg}{s}$. Es gilt: y(0) = 0 m und $v(0) = 1{,}4\,\frac{m}{s}$. AB

1) Stelle die Schwingungsgleichung auf und löse die Anfangswertaufgabe.
2) Stelle den Verlauf dieser Schwingung grafisch dar.
3) Das System wird mit einer äußeren periodischen Kraft $F = 6\,N \cdot \sin(4\,s^{-1} \cdot t)$ zum Schwingen angeregt. Ermittle den Verlauf dieser erzwungenen Schwingung.

3.108 Zeige, dass für die Resonanzkreisfrequenz ω_r gilt: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ CD
Dokumentiere deine Vorgehensweise.

3.6.2 Elektrische Schwingungen

Enthält ein Stromkreis eine Spule und einen Kondensator, so handelt es sich um einen elektromagnetischen Schwingkreis, in dem eine Energieumwandlung zwischen elektrischer und magnetischer Energie stattfindet. Die mathematische Beschreibung dieses Vorgangs führt auf lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, so genannte Schwingungsgleichungen.

Freie elektromagnetische Schwingungen

Man betrachtet zunächst den idealisierten Fall einer Schaltung ohne Widerstand. Der zuvor auf die Anfangsladung $q(0) = Q_0$ aufgeladene Kondensator entlädt sich über die Spule, wobei die Stromstärke i in der Spule steigt.

Abb. 3.1

$$-L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

- Die Summe der Potentialänderungen entlang einer Masche ist null.

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

- Die Ladung der positiv geladenen Kondensatorplatte nimmt dabei ab. Man erhält für q(t) eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$q(t) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot t\right)$$

- Die allgemeine Lösung ist eine Schwingung mit der Frequenz $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$.
  ω_0 wird **Eigenkreisfrequenz** der ungedämpften **Schwingung** oder **Kennkreisfrequenz** genannt.

$$q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Mit der Anfangsbedingung $q(0) = Q_0$ ergibt sich als Lösung eine **freie ungedämpfte Schwingung**.

AB **3.109** In einem ungedämpften Schwingkreis (Abb. 3.1) mit L = 40 mH und C = 1F wird der Kondensator auf eine Spannung von 12 V aufgeladen. Zum Zeitpunkt t = 0 s wird der Schalter geschlossen.
Gib die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung an. Ermittle die Lösung unter der gegebenen Anfangsbedingung und stelle den Spannungsverlauf grafisch dar.

Lösung:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \Rightarrow C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{L} = 0$$

- $q = C \cdot u_C$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{4 \cdot 10^{-2}} = 0 \Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + 25 \cdot u_C = 0$$

$$\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 5j$$

- charakteristische Gleichung

$$u_C(t) = C_1 \cdot \cos(5t) + C_2 \cdot \sin(5t)$$

- allgemeine Lösung

$$u_C(0) = 12 \text{ und } i(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 12, C_2 = 0$$

- $i(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = 0$

$$u_C(t) = 12V \cdot \cos(5\,s^{-1} \cdot t)$$

- Spezielle Lösung

In der Realität gibt es in jedem Stromkreis einen Widerstand R.
Mit analogen Überlegungen ergibt sich:

R L
u_0 C

Abb. 3.2

$-L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{q}{C} = 0$

$\Rightarrow$ (1) $L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

- **Differentialgleichung für die Ladung q**

bzw. (2) $L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

- Für den Kondensator gilt: $q = C \cdot u_C$
  Man erhält die **Differentialgleichung für die Kondensatorspannung u_C.**

bzw. (3) $L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

- Durch Ableiten der ursprünglichen Gleichung nach der Zeit erhält man mit $i = C \cdot \frac{dq}{dt}$ die **Differentialgleichung für den Strom i.**

Beim Lösen dieser Gleichungen können sich drei verschiedene Fälle ergeben. Diese erkennt man anhand der charakteristischen Gleichung. Zum Beispiel ergibt sich für Gleichung (1):

$L \cdot \lambda^2 + R \cdot \lambda + \frac{1}{C} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ bzw.

$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

- $\delta = \frac{R}{2L}$ wird **Abklingkonstante** oder **Dämpfungsfaktor** genannt. Das Verhältnis $\frac{\delta}{\omega_0}$ wird als **Dämpfungsgrad D** bezeichnet.

Die gegebene Differentialgleichung führt auf eine freie gedämpfte Schwingung, die meist mithilfe der Bezeichnungen $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ angegeben wird:

(1) $L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = 0$

Es ergeben sich die bereits bekannten Lösungsfälle:

- **Kriechfall (aperiodische Schwingung)**: $\delta > \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D > 1$
  Da $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} > \delta$ gilt, sind die beiden verschiedenen reellen Lösungen λ_1 und λ_2 negativ.
  Allgemeine Lösung: $q(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$
- **Aperiodischer Grenzfall**: $\delta = \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D = 1$
  Das Lösen der charakteristischen Gleichung führt auf die reelle Doppellösung $\lambda_1 = \lambda_2$.
  Allgemeine Lösung: $q(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$
- **Gedämpfte Schwingung**: $\delta < \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D < 1$
  Das Lösen der charakteristischen Gleichung führt auf konjugiert komplexe Lösungen.
  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$
  ω_d mit $\omega_d = |\delta^2 - \omega_0^2|$ ist die **Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung** und immer kleiner als die Kennkreisfrequenz ω_0 (Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung).
  Allgemeine Lösung: $q(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)\right)$

AB **3.110** In einem gedämpften Schwingkreis (Abb. 3.2) mit $R = 20\ \Omega$, $L = 0{,}5$ H und $C = 1$ mF wird der Kondensator auf eine Spannung von 6 V aufgeladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s wird der Schalter geschlossen und der Kondensator entladen.
Stelle die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung auf. Berechne die spezielle Lösung und stelle diese grafisch dar.

Lösung:

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 40 \cdot \frac{du_C}{dt} + 2 \cdot 10^3 \cdot u_C = 0$$

- Gegebene Werte in die Differentialgleichung für $u_C(t)$ einsetzen

$$\lambda_{1,2} = -20 \pm \sqrt{400 - 2\,000} = -20 \pm 40j$$

- Charakteristische Gleichung lösen

$$u_C(t) = e^{-20t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(40t) + C_2 \cdot \sin(40t)\right)$$

- Allgemeine Lösung

Anfangsbedingungen:

$$u_C(0) = 6 \text{ und } i(0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

- Anfangsbedingungen in $u_C(t)$ und $\frac{du_C}{dt}$ einsetzen.

$$C_1 = 6,\ C_2 = 3$$

$$u_C(t) = e^{-20t} \cdot \left(6 \cdot \cos(40t) + 3 \cdot \sin(40t)\right)$$

- Lösung der Anfangswertaufgabe

Schwingungsgleichung einer freien elektromagnetischen Schwingung

Die Differentialgleichung für die Ladung q, die Stromstärke i und die Kondensatorspannung u_C ist jeweils von der Form:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^{\ 2} \cdot y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^{\ 2} \cdot y = 0$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ... Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung, Kennkreisfrequenz

$\delta = \frac{R}{2L}$ ... Abklingkonstante; $\delta = 0$ ... ungedämpfte Schwingung

$D = \frac{\delta}{\omega_0}$ ... Dämpfungsgrad

Die Lösung hängt von der Diskrimanten $\delta^2 - \omega_0^{\ 2}$ der charakteristischen Gleichung bzw. vom Dämpfungsgrad D ab.

- **Kriechfall:** $\delta > \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D > 1$
  $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- **Aperiodischer Grenzfall:** $\delta = \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D = 1$
  $y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t)$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$
- **Gedämpfte Schwingung:** $\delta < \omega_0$ bzw. Dämpfungsgrad $D < 1$
  $y(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_d \cdot t)\right)$ mit $\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$

  ω_d = ... Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung

Erzwungene elektromagnetische Schwingungen

Wird an einen RLC-Schwingkreis eine Spannung u_e angelegt, so erhält man eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei entspricht die Funktion $u_e(t)$ der Störfunktion s(t). Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung wird durch Wahl eines geeigneten Ansatzes ermittelt.

(1) $L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u_e(t)$

- Ladungsdifferentialgleichung

(2) $L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u_e(t)$

- Spannungsdifferentialgleichung

(3) $L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du_e}{dt}$

- Da die Gleichung für den Strom i(t) durch Ableiten nach der Zeit ermittelt wurde, ist die Störfunktion in diesem Fall die nach der Zeit abgeleitete Funktion $\frac{du_e}{dt}$.

Für die Lösung der homogenen Gleichung gelten die Überlegungen, die für die freie gedämpfte Schwingung angestellt wurden. Die homogene Lösung liefert in jedem Fall Funktionen, deren Werte sich rasch dem Wert null nähern. Man bezeichnet sie daher als **flüchtigen Anteil** der Lösung. Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist von der angelegten Spannung abhängig und stellt den **stationären Anteil** der Lösung dar.

Ist die angelegte Spannung $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, so gilt für den stationären Teil $u_{C,\,p}$ der Lösung, die so genannte „Sinusantwort" (siehe Aufgabe 3.117):

$$u_{C,\,p}(t) = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ mit } \tan(\varphi) = -\frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \text{ und } \hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Aus $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ folgt: $\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

- Die maximale Amplitude $\hat{i}$ von i(t) ergibt sich, wenn der Nenner dieses Bruchs minimal ist, also für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$.

  ω_0 ist dann die **Resonanzkreisfrequenz**.

3.111 An einen RLC-Schwingkreis mit L = 0,5 H und C = 50 μF wird eine Spannung $u_e(t) = 120\text{ V} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ angelegt.

ABC

1) Stelle $\hat{i}$, abhängig von der gewählten Kreisfrequenz ω, für R = 5 Ω und R = 15 Ω grafisch dar.

2) Interpretiere das Diagramm im Hinblick auf die Resonanzkreisfrequenz und die maximale Stromstärke.

Lösung:

1)

2) Resonanzkreisfrequenz: $\omega_0 = 200\text{ s}^{-1}$
Die maximale Stromstärke bei Resonanz ist umso größer, je kleiner der Widerstand, also je kleiner die Dämpfung ist.

Differentialgleichungen

AB **3.112** Ein Stromkreis (Abb. 3.1, Seite 84) besteht aus einer Spule mit L = 2,5 H und einem auf 20 V aufgeladenen Kondensator mit C = 250 μF.

1) Gib die Differentialgleichung für die Ladung an und ermittle die Lösung unter der gegebenen Anfangsbedingung.

2) Gib den zeitlichen Verlauf von u_C und u_L sowie den Verlauf des Stroms i an.

3) Stelle u_C, u_L und i grafisch dar.

ABC **3.113** In einem gedämpften Schwingkreis (Abb. 3.2, Seite 85) mit L = 0,5 H und C = 1 mF wird der Kondensator auf eine Spannung von 6 V aufgeladen. Zum Zeitpunkt t = 0 wird der Schalter geschlossen und der Kondensator entladen.

1) Stelle eine Formel für den Dämpfungsgrad D, abhängig vom Widerstand R, auf.

2) Gib die Differentialgleichung für u_C an. Ermittle, welche Werte von R auf einen Kriechfall, einen aperiodischen Grenzfall bzw. auf eine gedämpfte Schwingung führen.

3) Wähle aus jedem in **2)** ermittelten Bereich einen Wert und stelle die entsprechenden Lösungsfunktionen grafisch dar.

AB **3.114** Ein Reihenschwingkreis enthält den Ohm'schen Widerstand R = 1 kΩ, einen Kondensator mit der Kapazität C = 2 μF und eine Spule mit der Induktivität L = 0,5 H.

1) Ermittle den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung u_C und des Stroms i, wenn eine Spannung von 12 V angelegt wird und der Kondensator davor ungeladen war.

2) Wie lautet die stationäre Lösung, wenn das System durch die von außen angelegte Wechselspannung von $u_{eff} = \frac{\hat{u}_C}{\sqrt{2}}$ = 230 V mit einer Frequenz von f = 50 Hz angeregt wird?

AB **3.115** Der Autofokusregelkreis einer Kamera hat näherungsweise das Verhalten eines schwingfähigen PT2-Elements. Dieses kann als RLC-Serienschwingkreis dargestellt werden.

1) Zeige, dass sich die Differentialgleichung in folgender Form angeben lässt:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\omega_0 \cdot D \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^{\ 2} \cdot u_C(t) = \omega_0^{\ 2} \cdot u(t) \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad D = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

2) Berechne die Lösung der Differentialgleichung für R = 140 Ω, L = 100 mH, C = 10 mF und u(t) = 12 V, wenn der Kondensator anfangs ungeladen ist. Gib den flüchtigen Anteil und den stationären Anteil der Lösung an und stelle die Ergebnisse grafisch dar.

ABC **3.116** **a)** In einem RLC-Kreis ist L = 4,15 mH und R = 220 Ω. Die Resonanzkreisfrequenz liegt bei 33 kHz.

1) Berechne, wie groß C sein muss.

2) Berechne den maximalen Wert des Stroms i, wenn eine Spannung mit û = 250 V angelegt wird.

b) Um eine Radiofrequenz zu verstärken, wird ein Schwingkreis verwendet, dessen Resonanzfrequenz der gesendeten Frequenz entspricht. Eine Spule mit L = 5 H ist vorrätig.

1) Recherchiere die Frequenz, mit der dein Lieblingsradiosender sendet.

2) Berechne, welche Kapazität ein dafür geeigneter Kondensator aufweisen muss.

BD **3.117** Zeige, dass für die stationäre Lösung in einem RLC-Schwingkreis mit $u_e(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gilt:

$$u_{C,p}(t) = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \text{ mit } \tan(\varphi) = -\frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \text{ und } \hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{\omega C \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

3.7 Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Viele Differentialgleichungen, die in den Naturwissenschaften und der Technik auftreten, sind nicht analytisch lösbar. In diesem Fall versucht man, die Lösungskurve mithilfe von Näherungsverfahren punktweise zu bestimmen.

3.7.1 Das Streckenzugverfahren von Euler

Beim **Streckenzugverfahren von Euler** wird eine spezielle Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$ durch die Ermittlung von Tangenten näherungsweise bestimmt. Durch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist auch ein Punkt $P_0(x_0|y_0)$ bekannt, der auf der Lösungskurve liegen muss. Da die Steigung der Kurve in diesem Punkt durch die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ berechnet werden kann, kann man die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt P_0 angeben.

Leonhard Euler

Um die Lösungskurve in einem Intervall $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$ nährungsweise zu bestimmen, zerlegt man dieses Intervall in n gleich große Teile mit der Schrittweite Δx.

Im Anfangspunkt $P_0(x_0|y_0)$ wird die Lösungskurve durch die Tangente t_0 bis zur Stelle x_1 ersetzt. Die nächste Stützstelle $P_1(x_1|y_1)$ liegt auf dieser Tangente. Man erhält den Wert von y_1 durch $y_1 = y_0 + \Delta x \cdot y'(x_0) = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$.

Der Punkt P_1 liegt zwar nicht mehr auf der Lösungskurve y durch P_0, aber auf einer knapp daneben liegenden Kurve $\overline{y}$ aus der Kurvenschar.

Das Verfahren wird fortgesetzt, indem man in P_1 eine Tangente t_1 an die Kurve $\overline{y}$ legt und die nächste Stützstelle P_2 analog ermittelt. Auf diese Weise erhält man einen Streckenzug durch die Punkte $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$, der die spezielle Lösung der Differentialgleichung nähert.

ZB: Mithilfe des Streckenzugverfahrens von Euler mit einer Schrittweite von $\Delta x = 0{,}02$ wird die Differentialgleichung $y' - y = e^x$ mit $y(0) = 1$ näherungsweise gelöst.

$y' = y + e^x$ • Umformen auf $y' = f(x, y)$

$x_0 = 0, y_0 = 1$ • Anfangsbedingungen

$x_1 = x_0 + \Delta x = 0{,}02$ $\quad y_1 = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}02 \cdot (1 + e^0) = 1{,}04$

$x_2 = 0{,}04$ $\quad y_2 = y_1 + \Delta x \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}04 + 0{,}02 \cdot (1{,}04 + e^{0{,}02}) = 1{,}081204...$

$x_3 = 0{,}06$ $\quad y_3 = y_2 + \Delta x \cdot f(x_2, y_2) = 1{,}081204... + 0{,}02 \cdot (1{,}081204... + e^{0{,}04}) = 1{,}123644...$

$x_4 = 0{,}08$ $\quad y_4 = y_3 + \Delta x \cdot f(x_3, y_3) = 1{,}167353...$

$x_5 = 0{,}1$ $\quad y_5 = y_4 + \Delta x \cdot f(x_4, y_4) = 1{,}212366...$

Die Lösungskurve kann im Intervall [0; 0,1] durch die fünf ermittelten Punkte $P_n(x_n|y_n)$ genähert werden.

Das Verfahren kann nach beliebig vielen Schritten bzw. am Ende des Intervalls abgebrochen werden. Je kleiner die Schrittweite Δx gewählt wird, desto besser nähert der Streckenzug den tatsächlichen Verlauf der Lösungskurve.

Differentialgleichungen

Streckenzugverfahren von Euler
Die Berechnung der Lösungskurve $y = y(x)$ einer Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ $y' = f(x, y)$ durch einen Anfangspunkt $P_0(x_0|y_0)$ lässt sich schrittweise nähern mit:
$y(x_i) = y_i = y_{i-1} + \Delta x \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$

B **3.118** ***1)*** Bestimme jenen Wert, den die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' + 2y = 6$ mit $y(0) = 6$ an der Stelle $x = 1$ hat, näherungsweise mithilfe des Streckenzugverfahrens von Euler. Verwende dabei eine Schrittweite $\Delta x = 0{,}2$ sowie den Startwert $x_0 = 0$.
2) Ermittle den exakten Wert an der Stelle $x = 1$ und bestimme den absoluten und den relativen Fehler zum Ergebnis aus ***1)***.

Lösung:
1) Streckenzugverfahren:
$y' = 6 - 2y$
$x_0 = 0 \qquad y_0 = 6$
$x_1 = 0{,}2 \qquad y_1 = 6 + 0{,}2 \cdot (-6) = 4{,}8$
$x_2 = 0{,}4 \qquad y_2 = 4{,}8 + 0{,}2 \cdot (-3{,}6) = 4{,}08$
$x_3 = 0{,}6 \qquad y_3 = 3{,}648$
$x_4 = 0{,}8 \qquad y_4 = 3{,}3888$
$x_5 = 1{,}0 \qquad y_5 = 3{,}23328$

2) Lösung der Differentialgleichung:
$y' + 2y = 0$
$y_h = C \cdot e^{-2x}$ ● Homogene Lösung
$y_p = a \Rightarrow a = 3$ ● Partikuläre Lösung
$y = C \cdot e^{-2x} + 3$ ● Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
$y(0) = 6 \Rightarrow C = 3$
$y = 3 \cdot e^{-2x} + 3$ ● Spezielle Lösung
$y(1) = 3{,}406005...$ ● Exakter Wert

Fehler:
$|y_5 - y(1)| = 0{,}172725...$ ● Absoluter Fehler
$\left|\frac{y_5 - y(1)}{y(1)}\right| = 0{,}050712...$ ● Relativer Fehler

Aufgaben 3.119 – 3.120: Löse die Aufgaben mit dem Streckenzugverfahren von Euler.

B **3.119** Nähere die spezielle Lösung der Differentialgleichung $y' + y - e^{3x} = 0$ mit $y(0) = 1$ im Intervall [0; 5] durch 5 Teilintervalle.
Stelle den Streckenzug und die spezielle Lösung grafisch dar.

B **3.120** Nähere die spezielle Lösung der Differentialgleichung $y' = x - y$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ im Intervall [1; 1,4] mit einer Schrittweite von $\Delta x = 0{,}1$ an.

B **3.121** Ermittle eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = \sqrt{x + y}$ im Intervall [1; 1,2] mit $y(0) = 2$ mit einer Schrittweite von $\Delta x = 0{,}05$.

BC **3.122** Berechne die Lösung der Differentialgleichung $y' - 6y = 12x^2$ mit $y(0) = 2$ näherungsweise mit einer Schrittweite von $\Delta x = 0{,}1$ und vergleiche das Ergebnis an der Stelle $x = 0{,}6$ mit dem exakten Wert.

3.7.2 Das Runge-Kutta-Verfahren

Die deutschen Mathematiker Carl David Runge (1856 – 1927) und Martin Wilhelm Kutta (1867 – 1944) entwickelten ein effizientes numerisches Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das nach ihnen benannte **Runge-Kutta-Verfahren**.

Ausgehend vom Anfangswertproblem $y' = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$ wird bei diesem Verfahren bei jedem Iterationsschritt nicht nur $f(x_n, y(x_n))$, sondern auch das gewichtete Mittel von $f(x, y(x))$ in 4 Punkten des Intervalls $[x_n; x_{n+1}]$ berücksichtigt. Dies führt auf folgende Formel:

Runge-Kutta-Verfahren
Iterationsverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot [c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4]$ mit h … Schrittweite und

$c_1 = f(x_n, y_n)$ $\quad c_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + c_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$ $\quad c_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + c_2 \cdot \frac{h}{2}\right)$ $\quad c_4 = f\left(x_n + h, y_n + c_3 \cdot h\right)$

3.123 Ermittle eine Näherung für die Lösung des Anfangswertproblems $y' = 1 - x + 4y$ mit $y(0) = 1$ im Intervall [0; 1] mit $h = 0{,}2$ mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens.

B

TE

Lösung mit Excel 2010:

	A	B	C	D	E	F	G
1	h	0,2					
2	xn	yn	c1	c2	c3	c4	yn+1
3	0	1	5,000000	6,900000	7,660000	10,928000	2,501600
4	0,2	2,501600	10,806400	15,028960	16,717984	23,980787	5,777636
5	0,4	5,777636	23,710543	33,094761	36,848448	52,989301	12,997178
6	0,6	12,997178	52,388712	73,244196	81,586390	117,457824	28,980768
7	0,8	28,980768	116,123073	162,472302	181,011993	260,732667	64,441579
8	1	64,441579	257,766316	360,772843	401,975454	579,146679	143,188565

Der Zelle B1 wird der Name **h** zugewiesen und die Schrittweite **0,2** wird in diese Zelle eingetragen. In die Zellen A3 und B3 werden die Startwerte entsprechend der Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ eingegeben.
Nun werden in den Zellen C3 bis F3 die Formeln für c_1, c_2, c_3 und c_4 eingetragen:
Zelle C3: **=1-A3+4*B3**
Zelle D3: **=1-(A3+h/2)+4*(B3+C3*h/2)**
Zelle E3: **=1-(A3+h/2)+4*(B3+D3*h/2)**
Zelle F3: **=1-(A3+h)+4*(B3+E3*h)**
Zelle G3: **=B3+h/6*(C3+2*D3+2*E3+F3)**
In Zelle B4 muss der Wert von G3 angegeben werden. Zelle B4: **=G3**
Die Zellen werden nach unten kopiert.

Die Lösung des Anfangswertproblems wird durch die sechs Punkte $P_n(x_n|y_n)$ genähert.

3.124 ***1)*** Ermittle die Lösung des Anfangswertproblems im Intervall [0; 5] näherungsweise mihilfe des Runge-Kutta-Verfahrens mit der Schrittweite h.

B

TE

2) Stelle den Streckenzug im Intervall [0; 5] grafisch dar.
a) $y' + 0{,}25y = e^{0{,}05x}$; $y(0) = 2$; $h = 0{,}2$ ***b)*** $y' = 1 - 2xy$; $y(0) = -1$; $h = 0{,}5$

3.125 ***1)*** Ermittle jeweils eine Näherung für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = \sqrt{x + y}$ im Intervall [1; 1,2] mit $y(0) = 2$ mit einer Schrittweite von $h_1 = 0{,}02$ und $h_2 = 0{,}05$ mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens.

BCD

TE

2) Berechne den „exakten" Wert am Ende des Intervalls mittels Technologieeinsatz.
3) Beurteile die Qualität der Näherungen.

Differentialgleichungen

Zusammenfassung

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen beschreibt.
Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung ist eine **Funktionenschar**.
Durch **Anfangs-** oder **Randbedingungen** wird eine **spezielle Lösungskurve** ausgewählt.

Trennen der Variabeln:
Differentialgleichungen der Form $y' = f(x) \cdot g(x)$ können mittels Trennen der Variablen gelöst werden.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung: $y' + f(x) \cdot y = s(x)$
Lösung: $y = y_h + y_p$ y_h ... homogene Lösung, y_p ... partikuläre Lösung

Berechnung der homogenen Lösung:
- Exponentialansatz
- Trennen der Variablen

Berechnung der partikulären Lösung:
- Variation der Konstanten
- Spezielle Lösungsansätze

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = s(x)$
Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$.

$y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$y_h = C_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$
$y_h = C_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta x)$ $\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

Schwingungen

Mechanische Schwingung:

$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F(t)$

$\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + {\omega_0}^2 \cdot y = \frac{F(t)}{m}$

$\delta = \frac{b}{2m}; \ {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$

m ... Masse, k ... Federkonstante,
b ... Reibungskonstante

Elektromagnetische Schwingung:

$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du_e}{dt}$

$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = u_e$

$L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = u_e$

L ... Induktivität, C ... Kapazität,
R ... Ohm'scher Widerstand

Numerische Lösungsverfahren
Strechenzugverfahren von Euler, Runge-Kutta-Verfahren

Weitere Aufgaben

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgaben 3.126 – 3.128: Ermittle jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

B **3.126** **a)** $y' + 3y = e^{-3x}$ **b)** $y' + x^2 y = x^2$

B **3.127** **a)** $4y' + 8y = \sin(x)$ **b)** $y' - 5y = 6 \cdot \cos(x)$

B **3.128** **a)** $y' = \frac{xy}{x^2 - 1}$ **b)** $y' - 2xy = 4x$

Aufgaben 3.129 – 3.130: Ermittle jeweils die Lösung der Anfangswertaufgabe.

B **3.129** **a)** $y' + 3y = \sin(3x) + \cos(3x)$; $y(0) = 1$ **b)** $y' + 6y = 3 \cdot \cos(x) + 4 \cdot \sin(x)$; $y(0)=0$

B **3.130** **a)** $y' - 5y = 4e^{2x}$; $y(0) = 1$ **b)** $y' + 3 \cdot y = -\cos(x)$; $y(0) = 5$

3.131 Aufgrund von heftigen Regenfällen und daraus resultierenden Überschwemmungen gelangen Bakterien in die Trinkwasserversorgung einer Kleinstadt. Die Zahl der Bakterien vermehrt sich proportional zur gegenwärtigen Anzahl. Zu Beginn gelangen 5 000 Bakterien in die Trinkwasserversorgung, nach 20 Minuten sind es bereits 10 000.
1) Stelle die Differentialgleichung auf, die diesen Wachstumsvorgang beschreibt.
2) Ermittle, wie viele Bakterien sich nach zwei Tagen im Trinkwasser befinden.

AB

3.132 Ein Aquarium für Salzwasserfische enthält zu Beginn 1 kg Salz in 100 Liter Wasser gelöst. In dieses Aquarium fließen nun $15\frac{\text{L}}{\text{min}}$ Salzwasser mit einer Konzentration von $0{,}1\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}$ Salz zu und es fließen $15\frac{\text{L}}{\text{min}}$ dieser Mischung wieder aus. Zufluss und Abfluss sind während des Vorgangs immer geöffnet. Durch ständiges Umrühren entsteht eine homogene Mischung. Berechne, welcher Salzanteil sich nach 25 Minuten im Aquarium befindet.

AB

3.133 Nach dem Grillen hat ein Grillgitter noch eine Temperatur von 150 °C. Das Maß der Abkühlung vom Grillgitter ist proportional zur Differenz zwischen der Umgebungstemperatur und der jeweiligen Temperatur des Grillgitters. Die Außentemperatur beträgt 25 °C. Das Grillgitter kühlt nach 18 Minuten im Freien auf 90 °C ab.
1) Stelle die entsprechende Differentialgleichung auf.
2) Herr Burger möchte das Grillgitter erst angreifen, wenn es eine Temperatur von 30 °C hat. Wie lange muss er warten, bis er das Gitter angreifen kann?

AB

3.134 Am Beginn des Wachstums ist bei vielen Pflanzen die zeitliche Änderungsrate der Höhe direkt proportional zur Höhe h und umgekehrt proportional zu t^2.
1) Stelle die Differentialgleichung für h(t) auf.
2) Nach einem Tag ist die Pflanze 1 cm hoch, nach drei Tagen misst sie bereits 5 cm. Ermittle die spezielle Lösung für h(t).

AB

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgaben 3.135– 3.136: Ermittle jeweils die Lösung der Anfangswertaufgabe.

3.135 **a)** $y'' + 2y' - 3y = 0;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4$ **b)** $y'' + 2y' - 8y = 0;\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0$ B

3.136 **a)** $y'' + 3y' = 5;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 2$ **b)** $y'' + 2y' - 3y = 9;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ B

Aufgaben 3.137 – 3.138: Ermittle jeweils die allgemeine Lösung.

3.137 **a)** $y'' - 16y' + 64y = 128t + 128$ **b)** $y'' + 2y' + 2y = 4$ B

3.138 **a)** $y'' + 2y' + y = 8 \cdot \sin(t)$ **b)** $y'' + 12y' = 16 \cdot \cos(2t)$ B

Schwingungen

3.139 Ein Stoßdämpfer eines Rads bei einem Auto wird durch die Masse m = 300 kg belastet. Der Stoßdämpfer hat den Reibungskoeffizienten $b = 1\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ und die Federkonstante $k = 42\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Er wird um 5 cm zusammengedrückt und zum Zeitpunkt t = 0 s wieder losgelassen.
1) Stelle die Differentialgleichung auf und gib an, welcher Schwingfall vorliegt.
2) Ermittle die Lösung der Anfangswertaufgabe und stelle sie grafisch dar.

AB

Differentialgleichungen

ABC **3.140** Im Wasser mit einer Dichte ρ_0 treibt eine quaderförmige Boje mit einer quadratischen Grundfläche, mit einer Seitenlänge ℓ und der Dichte ρ. Drückt man auf die Boje und lässt sie wieder los, beginnt sie vertikal zu schwingen. Vernachlässigt man die Dämpfung aufgrund des Reibungswiderstands im Wasser bzw. der umgebenden Luft, gilt für die Schwingung aufgrund des Archimedischen Prinzips die Differentialgleichung $\rho \cdot \ell \cdot y'' + \rho_0 \cdot g \cdot y = 0$ (g … Erdbeschleunigung).

1) Formuliere das Archimedische Prinzip mit eigenen Worten und recherchiere, welches Problem Archimedes dazu veranlasst hat, dieses Gesetz zu formulieren.

2) Löse die Differentialgleichung und bestimme das Schwingungsverhalten der Boje.

ABC **3.141** Ein Feder-Masse-System hat die Masse m = 2 kg, die Federkonstante $k = 200\,\frac{N}{m}$ und den Reibungskoeffizienten $b = 10\,\frac{kg}{s}$. Zum Zeitpunkt t = 0 s wird es aus der Ruhelage durch einen Stoß angeregt, der eine Anfangsgeschwindigkeit von $v(0\text{ s}) = 5\,\frac{m}{s}$ hervorruft.

1) Stelle die Differentialgleichung auf und löse sie.

2) Beschreibe den Schwingfall und stelle den Verlauf der Schwingung grafisch dar.

3) Ermittle die maximale Auslenkung grafisch und rechnerisch.

4) Löse die Differentialgleichung auch für den Fall, dass das System durch eine konstante Kraft von F(t) = 4 N angeregt wird.

ABC **3.142** Ein elektrischer Schwingkreis hat einen Widerstand von 6 Ω, eine Induktivität von 2 H und eine Kapazität von 200 μF. Zum Zeitpunkt t = 0 s gibt es keinen Anfangsstrom und der Kondensator ist nicht aufgeladen. Es wird eine konstante Spannung $u_e(t) = 60$ V angelegt.

1) Stelle die Ladungsdifferentialgleichung auf.

2) Löse die homogene Differentialgleichung und beschreibe die Art der Schwingung.

Aufgaben in englischer Sprache

English	Deutsch	English	Deutsch
boundary value	Randwert	inhomogenous	inhomogen
characteristic equation	charakteristische Gleichung	initial condition	Anfangsbedingung
differential equation	Differentialgleichung	initial value problem	Anfangswertaufgabe
general solution	allgemeine Lösung	particular solution	partikuläre Lösung
homogenous	homogen	separation of variables	Trennen der Variablen

BC **3.143** Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x}$ and y(1) = 2 using separation of variables. Describe the method in your own words.

AB **3.144** A tank contains 100 gallons of brine that contains a NaCl-concentration of 3 pounds per gallon. Three gallons of brine with a NaCl-concentration of 2 pounds per gallon flows into the tank each minute. At the same time 3 gallons of the mixture flows out each minute. The mixture is kept uniform by constant stirring. Find the NaCl-content of the brine as a function of the time.

AB **3.145** A mass that has a temperature of 95 °C is immersed in a bain-marie which is kept at a constant temperature of 60 °C. In one minute, the temperature of the mass decreases to 80 °C. Calculate how long it will take for the mass temperature to decrease to 65 °C.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann den Grad und die Ordnung einer Differentialgleichung angeben. ZB: $2y'' + 3y' - 5y^3 = 3 \cdot \sin(2x)$ Grad: ___ Ordnung: ___	
2	Ich kann die Begriffe Richtungsfeld und Linienelement erklären und das Richtungsfeld einer Differentialgleichung zeichnen.	
3	Kreuze die richtige Aussage an. ○ Die Lösung einer Anfangswertaufgabe ist eine Zahl. ○ Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion. ○ Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktionenschar. ○ Die Lösung einer Anfangswertaufgabe ist eine Funktion.	
4	Ich kann die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung mittels Trennen der Variablen ermitteln: ZB: $y' = y \cdot \sin(x)$	
5	Ich kenne den Unterschied zwischen einer homogenen und einer inhomogenen linearen Differentialgleichung.	
6	Ich kann den Unterschied zwischen allgemeiner und partikulärer Lösung erklären.	
7	Ordne den angegebenen Gleichungen den zugehörigen Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung zu. 1) $y' + 5y = 3t^2 + 7$ ☐ 2) $y'' - 3y' + 8y = 4 \cdot \sin(3t)$ ☐ A $y_p = A \cdot e^{bt}$ B $y_p = A_2 \cdot t^2 + A_1 \cdot t + A_0$ C $y_p = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$ D $y_p = A \cdot t + B$	
8	Ich kann die charakteristische Gleichung zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten angeben. ZB: $2y'' + 3y' - 8y = 3x + 1$	
9	Gib die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung anhand der Lösungen der charakteristischen Gleichung an. A) $\lambda_{1,2} = -3 \pm 5j$ B) $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0{,}5$ C) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$	

Lösung:
1) Grad: 3; Ordnung: 2 2) siehe Seiten 52ff 3) Richtig: Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktionenschar.
4) $y = C \cdot e^{-\cos(x)}$ 5) siehe Seite 62 6) siehe Seite 42 7) 1B; 2C 8) $2\lambda^2 + 3\lambda - 8 = 0$
9) A) $y = C_1 \cdot e^{-3x} \cdot \cos(5x) + C_2 \cdot e^{-3x} \cdot \sin(5x)$ B) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{0,5x}$ C) $y = e^{4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$

4 Integraltransformationen

Schon sehr früh begannen Menschen, Nachrichten mithilfe von Rauchzeichen oder Trommeln zu verbreiten.
Die vom Sender verwendeten Signale mussten auch dem Empfänger bekannt sein. Mit der elektrischen Telegraphie, die unter anderem von Samuel Finley Breese Morse (amerikanischer Maler, 1791 – 1872) entwickelt wurde, konnte die Nachrichtenübermittlung wesentlich verbessert werden. Das nach ihm benannte Morse-Alphabet verwendet Punkte und Striche, die mithilfe von Signalen („Strom", „kein Strom") übertragen werden. Aus mathematischer Sicht sind Signale zeitabhängige Vorgänge.
Im Folgenden werden solche zeitabhängige Funktionen mithilfe spezieller Abbildungen in andere Bereiche transformiert.

4.1 Spezielle Funktionen zur Beschreibung zeitabhängiger Vorgänge

4.1.1 Spezielle Funktionen

AB **4.1** Jemand möchte mit einer Taschenlampe die Nachricht „SOS" in Morse-Zeichen schicken. Für „Punkt" drückt er 1 Sekunde lang auf den Einschaltknopf, „Strich" dauert dreimal so lang. Zwischen jedem Symbol ist eine Pause in der Länge eines „Punkts". Stelle die Nachricht „· · · – – – · · ·" als Zeitfunktion dar mit „Licht an" ≙ 1, „Licht aus" ≙ 0.

- **Einheitssprungfunktion**

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Die Einheitssprungfunktion wird meist **Sprungfunktion** $\sigma(t)$ bzw. $\varepsilon(t)$ oder **Heaviside'sche Sprungfunktion** $\Theta(t)$ bzw. $H(t)$ genannt.
Sie wird zur Beschreibung von Einschaltvorgängen verwendet.

Soll der Einschaltvorgang zu einem Zeitpunkt $t_0 \neq 0$ beginnen, muss die Sprungfunktion verschoben werden.

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } t - t_0 \geqslant 0 \\ 0 & \text{für } t - t_0 < 0 \end{cases}$$

Wird eine beliebige Funktion $y = f(t)$ mit der Sprungfunktion multipliziert, so „beginnt" die Funktion $y = f(t) \cdot \sigma(t)$ erst bei $t = 0$.
Für $t < 0$ ist $\sigma(t) = 0$, daher ist auch $y = f(t) \cdot 0 = 0$.
Für $t \geqslant 0$ ist $\sigma(t) = 1$, daher ist $y = f(t) \cdot 1 = f(t)$.

ZB: $y = \sin(t) \cdot \sigma(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

- **Rampenfunktion**

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Die Rampenfunktion wird verwendet, um einen linearen Anstieg auf ein vorgegebenes Sollsignal zu erreichen.
Sie kann auch mithilfe der σ-Funktion beschrieben werden:
$r(t) = t \cdot \sigma(t)$

Impulsfunktionen

Ein Impuls beschreibt einen Vorgang, der eine bestimmte Zeit, die so genannte Impulsdauer, dauert. Wird der Impuls durch eine Funktion f beschrieben, so wird die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der t-Achse als Impulsstärke bezeichnet.

- **Rechteckimpuls**

  $$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_1 \leqslant t < t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  Diese Funktion lässt sich auch mithilfe von Einheitssprungfunktionen angeben.
  ZB: $t_1 = 1, t_2 = 3$
  $\sigma(t-1) = 1$ für $t \geqslant 1$ und $\sigma(t-3) = 1$ für $t \geqslant 3$.
  Subtrahiert man die zweite Funktion von der ersten, so erhält man für $t \geqslant 3$: $1 - 1 = 0$. Daher gilt:

  $$f(t) = \sigma(t-1) - \sigma(t-3) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leqslant t < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Dirac'sche Deltafunktion** (Paul Adrien Maurice Dirac, britischer Physiker, 1902 – 1984)

  $$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

  Dieser idealisierte Impuls wird auch **Deltaimpuls**, **Dirac-Stoß** oder **Nadelimpuls** genannt und durch die Deltafunktion $\delta(t)$ symbolisch beschrieben. Die Deltafunktion wird verwendet, um einen Vorgang durch einen kurzen Impuls (Stoß) anzuregen.
  Anschaulich kann man sich vorstellen, dass die Deltafunktion aus einem Reckteckimpuls mit Impulsstärke 1 entsteht. Wird die Impulsdauer Δt immer kürzer, so muss die Impulshöhe $\frac{1}{\Delta t}$ immer größer werden. Geht die Zeitdauer $t \to 0$, so geht die Höhe gegen unendlich.

  Aufgrund des „Funktionswerts ∞" an der Stelle 0 ist die Deltafunktion keine Funktion im üblichen Sinn, sondern eine so genannte verallgemeinerte Funktion oder Distribution. Sie wird grafisch als Pfeil symbolisiert.
  Dass der Flächeninhalt 1 ist, wird symbolisch mithilfe des Integrals angegeben: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

  Allgemein gilt die so genannte **Ausblendeigenschaft**, die den Wert einer Funktion „einblendet" und den Rest „ausblendet": $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t)\,dt = f(0)$

  Dieses Integral ist symbolisch zu verstehen und kann nicht wie üblich berechnet werden.
  ZB: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^t\,dt = e^0 = 1$

  Erfolgt der Impuls zu einem beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$, so gilt:

  $$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = t_0 \\ 0 & \text{für } t \neq t_0 \end{cases}$$

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t)\,dt = f(t_0)$$

  Die Deltafunktion ist die verallgemeinerte Ableitung der Sprungfunktion: $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$

AD **4.2** In der Grafik ist ein Signal dargestellt.
1) Ergänze die fehlenden Werte in der Funktionsgleichung.
2) Erkläre, wie die dargestellte Funktion mithilfe der Einheitssprungfunktion angegeben werden kann.

a) y, t; 1; 0; 2; $\sin(t + \ldots)$

b) y, t; 1; 0; 2; $e^{t+\ldots}$

BC **4.3** Multipliziere die gegebene Funktion mit der Einheitssprungfunktion und stelle das Ergebnis grafisch dar.
a) $f(t) = 2$ **b)** $f(t) = t$ **c)** $f(t) = e^{-t}$ **d)** $f(t) = \cos(t)$

AB **4.4** Stelle die mithilfe der Einheitssprungfunktion angegebene Funktion grafisch dar.
a) $f(t) = \sigma(t-2)$ **b)** $f(t) = 2 \cdot (\sigma(t-1) - \sigma(t-4))$ **c)** $f(t) = t \cdot \sigma(t-1)$

BC **4.5** Gib die Funktionsgleichung der dargestellten Funktion an.
1) Als stückweise definierte Funktion
2) Mithilfe der Einheitssprungfunktion

a) y, t; 1; 0; 2

b) y, t; 1; 0; 2

c) y, t; 1; 0; 1

BC **4.6** Berechne das Integral mithilfe der Ausblendeigenschaft der Deltafunktion.
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \cos(t)\,dt$ **b)** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot t\,dt$ **c)** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2) \cdot e^t\,dt$

4.1.2 Partialbruchzerlegung

Da in Abschnitt 4.3 die Methode der Partialbruchzerlegung (vgl. Band 3, Abschnitt 5.3.3) benötigt wird, wird sie hier kurz wiederholt.

ZB: $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x-4}$

$x_1 = -4, x_2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x+4) \cdot (x-1)$
- Bestimmen der Nullstellen des Nenners

$\frac{x+3}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$
- Ansatz für die Partialbrüche

$x + 3 = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+4)$
- Multiplikation mit dem Hauptnenner

$x = -4{:}\quad -1 = -5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

$x = 1{:}\quad 4 = 5B \Rightarrow B = \frac{4}{5}$
- Berechnung der Koeffizienten, zB durch Einsetzen der Nullstellen

$\frac{x+3}{x^2+3x-4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-1}$

B **4.7** Führe die Partialbruchzerlegung durch.
a) $\frac{1-x}{x^2+x}$ **b)** $\frac{3x-10}{x^2-5x+6}$ **c)** $\frac{6x^3-12x^2-x-6}{6x \cdot (x-2)}$ **d)** $\frac{x^3+1}{x^2+4x+1}$

4.1.3 Uneigentliche Integrale

Von einem uneigentlichen Integral spricht man, wenn der Integrand im Integrationsbereich unendlich wird oder wenn die Grenzen ±∞ sind. Diese Integrale werden – falls sie existieren – mithilfe von Grenzwerten berechnet (vgl. Band 3, Abschnitt 5.4).

- $\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to x_0} \left(\int_a^b f(x)\,dx \right)$ x_0 … Polstelle
- $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \left(\int_a^b f(x)\,dx \right)$ bzw. $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \left(\int_a^b f(x)\,dx \right)$

ZB: $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b e^{-x}\,dx \right) = \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \to \infty} (-e^{-b} - \underbrace{(-e^{-0})}_{-1}) = \underbrace{\lim_{b \to \infty} (-e^{-b})}_{\to 0} + 1 = 1$

Bei der Ermittlung des Grenzwerts kann es notwendig sein, die Regel von de l'Hospital zu verwenden (vgl. Band 3, Abschnitt 3.9).

$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g'(x)}{h'(x)} \right)$, wenn $\lim_{x \to x_0} (g(x)) = \lim_{x \to x_0} (h(x)) = 0$ und $\lim_{x \to x_0} (h'(x)) \neq 0$ bzw.

wenn $\lim_{x \to x_0} (g(x)) = \lim_{x \to x_0} (h(x)) = \infty$

4.8 Berechne den Wert des Integrals $\int_0^{\infty} t \cdot e^{-t}\,dt$, falls er existiert. **B**

Lösung:

$\int_0^{\infty} t \cdot e^{-t}\,dt = \lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b t \cdot e^{-t}\,dt \right) = \lim_{b \to \infty} (-t \cdot e^{-t}) \Big|_0^b + \lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b e^{-t}\,dt \right) =$

$= \lim_{b \to \infty} (-b \cdot e^{-b}) - \lim_{b \to \infty} (e^{-t}) \Big|_0^b$

$\lim_{b \to \infty} (-b \cdot e^{-b}) = „\infty \cdot 0" = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-b}{e^b} \right)$

$\lim_{b \to \infty} \left(\frac{-b}{e^b} \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-1}{e^b} \right) = 0$

$\lim_{b \to \infty} (e^{-t}) \Big|_0^b = \lim_{b \to \infty} (e^{-b}) + 1 = 1$

$\int_0^{\infty} t \cdot e^{-t}\,dt = 1$

- Die Grenzwertbildung führt auf den unbestimmten Ausdruck „∞ · 0". Durch Umformen wird dieser auf „$\frac{\infty}{\infty}$" gebracht, sodass die Regel von de l'Hospital (vgl. Band 3, Abschnitt 3.9) angewendet werden kann.

4.9 Erkläre, um welches uneigentliche Integral es sich handelt. Berechne den Wert des Integrals, falls er existiert. **BD**

a) $\int_0^{\infty} e^{-a \cdot x}\,dx$ **c)** $\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$ **e)** $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$ **g)** $\int_0^{\infty} \sin(t) \cdot e^{-t}\,dt$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1 - x^2}\,dx$ **d)** $\int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-t}\,dt$ **f)** $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$ **h)** $\int_0^{1} x^2 \cdot \ln(x)\,dx$

4.2 Fourier-Transformation

Mithilfe von Fourier-Reihen (vgl. Abschnitt 2.4) können periodische Zeitfunktionen f(t) als Summe von Schwingungen dargestellt werden.
Nun soll dieser Vorgang auf nicht periodische Funktionen erweitert werden. Mithilfe eines Spektrums wird so ein Übergang von einem Zeitbereich in den Frequenzbereich geschaffen.
Die **Fourier-Transformation** findet in vielen Bereichen praktische Anwendung, wie zum Beispiel in der Signaltechnik, der Seismologie oder der Optik.

BC **4.10** ***1)*** Zeichne die dargestellte Rechteckkurve für die Periodendauer T = 4 s, 16 s bzw. 32 s.
2) Beschreibe den weiteren Verlauf für $T \to \infty$.

Für eine periodische Funktion f mit der Periodendauer T kann die Fourier-Reihe mithilfe von Sinus- und Cosinusfunktionen beschrieben werden. Für die weiteren Überlegungen werden nun aber die komplexen Fourier-Koeffizienten verwendet:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t} \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-j \cdot n\omega_0 t}\,dt \quad \text{und } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Mithilfe der Fourier-Koeffizienten kann eine periodische Funktion durch ihr Amplitudenspektrum beschrieben werden. Nun soll ein derartiges Spektrum für eine nicht periodische Funktion angegeben werden. Dazu erhöht man die Dauer der Periode T und lässt sie schließlich unendlich groß werden. So entsteht aus der periodischen eine nichtperiodische Funktion.
Die in der Reihe auftretenden Kreisfrequenzen $n \cdot \omega_0$ $(n \in \mathbb{Z})$ unterscheiden sich jeweils um ω_0 voneinander. Wird T größer, so werden der Abstand ω_0 und die Koeffizienten c_n immer kleiner. Um die Spektren vergleichen zu können, wird der Faktor $\frac{1}{T}$ vor dem Integral bei c_n mit T multipliziert.

ZB: Rechteckkurve von Seite 32 mit gleich bleibender Impulsdauer π:

$$c_n = \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j \cdot n\frac{\pi^2}{T}} - e^{-j \cdot n\frac{\pi^2}{T}}\right) = \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi^2}{T}\right)$$

$T = 2\pi,\ \omega_0 = 1$

$T = 4\pi,\ \omega_0 = \frac{1}{2}$

Man erkennt, dass die „Koeffizienten" $T \cdot c_n$ immer auf der gleichen Kurve liegen, die unabhängig von der Periodendauer T ist. Für $T \to \infty$ geht ω_0 gegen 0 und aus dem diskreten wird ein kontinuierliches Spektrum.

Rechnerisch entspricht dem soeben veranschaulichten Vorgang der Grenzübergang $T \to \infty$ bei der Fourier-Reihe.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-j \cdot n\omega_0 t}\, dt \cdot \omega_0}_{c_n} \cdot e^{j \cdot n\omega_0 t}$$

- $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_0$
- $T \to \infty$, $n\omega_0 \to \omega$, $\omega_0 \to d\omega$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t}\, dt \right) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega \quad \text{mit } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t}\, dt$$

- $F(\omega)$ heißt **Spektralfunktion** (**Spektraldichte**), $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega$ **Fourier-Integral**.
- Das Fourier-Integral entspricht der Fourier-Reihe. Der Ausdruck $\frac{1}{2\pi} \cdot F(\omega)\, d\omega$ entspricht den Amplituden c_n, die Spektralfunktion $F(\omega)$ entspricht $T \cdot c_n$.
- Die Zuordnung $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t}\, dt$ wird **Fourier-Transformation** genannt.
- Die Funktion $F(\omega)$ – auch $F(j\omega)$ – ist im Allgemeinen eine komplexwertige Funktion. Der stets reelle Betrag $|F(\omega)|$ wird als **spektrale Amplitudendichte** oder **Amplitudenspektrum** $A(\omega)$ bezeichnet, $\varphi(\omega) = \arg(F(\omega))$ als **spektrale Phasendichte**.

Bei der **Fourier-Transformation** wird einer Funktion $f(t)$ eine Funktion $F(\omega)$ zugeordnet.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t}\, dt$$

Die Funktion $F(\omega)$ heißt **Fourier-Transformierte** von $f(t)$, falls das Integral konvergiert.

Das Integral konvergiert für viele Funktionen nicht. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz ist, dass die Fläche unter $|f(t)|$ endlich sein muss.

Die Funktion $f(t)$ wird als **Original-** oder **Zeitfunktion**, die Funktion $F(\omega)$ als **Bild-**, **Spektral-** oder **Frequenzfunktion** bezeichnet. Für die Fourier-Transformation werden auch folgende Schreibweisen verwendet:

- $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$
- $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$ ... **Korrespondenz**: Beim Korrespondenzsymbol „$\circ\!\!-\!\!\bullet$“ befindet sich der volle Kreis immer auf der Seite der Bildfunktion.

Das heißt, die Fourier-Transformierte entspricht dem Amplitudenspektrum, wenn keine periodische Funktion sondern ein Impuls gegeben ist.

Aus der Spektralfunktion kann mithilfe der **inversen Fourier-Transformation** (Fourier-Integral) die Rücktransformation in die Zeitfunktion erfolgen.

Inverse Fourier-Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega$$

Schreibweisen: $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ oder $F(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)$

B **4.11** Ein Reckteckimpuls ist eine Rechteckkurve mit unendlicher Periodendauer.

Ermittle die Fourier-Transformierte des gegebenen Rechteckimpulses. Stelle die Spektralfunktion und das Amplitudenspektrum grafisch dar.

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

Konvergenz: Der Flächeninhalt unter f(t) beträgt A = 4.
- Das Integral konvergiert.

$$\omega \neq 0: F(\omega) = \int_{-1}^{1} 2 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{2}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{j \cdot \omega} \cdot (e^{-j\omega} - e^{j\omega}) =$$

$$= \frac{4}{\omega} \cdot \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = \frac{4 \cdot \sin(\omega)}{\omega}$$
- $\sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$

$$\omega = 0 \cdot F(0) = \int_{-1}^{1} 2 \cdot e^{0}\, dt = \int_{-1}^{1} 2\, dt = 4$$
- Auswertung für $\omega = 0$

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{4 \cdot \sin(\omega)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 4 & \text{für } \omega = 0 \end{cases}$$
- Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

$F(\omega)$: $A(\omega) = |F(\omega)|$:
- Die Spektralfunktion ist reell und daher darstellbar.

Bemerkungen:

- Vergleicht man den Rechteckimpuls von Seite 100 unten mit jenem in Aufgabe 4.11, so erkennt man, dass sich die Dauer des Impulses auf die Breite des Frequenzspektrums auswirkt. Dieser Zusammenhang spielt eine wichtige Rolle in der Nachrichtentechnik.
  Je kürzer die Dauer im Zeitbereich ist, desto breiter ist der Frequenzbereich und umgekehrt. Dieser Zusammenhang wird durch den **Ähnlichkeitssatz** ausgedrückt:
  $\mathcal{F}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
  Statt der Kreisfrequenz ω wird auch die Frequenz f als Variable verwendet.
  Für das Fourier-Integral gilt dann: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi f \cdot t}\, df$
- Die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ wird auch in der Optik verwendet. Tritt parallel einfallendes Licht durch einen Spalt, so werden die Wellen auch in Bereiche seitlich des Spalts abgelenkt, man spricht von Beugung (vergleiche Abbildung auf Seite 100 oben). Wird der Spalt als Rechteckfunktion dargestellt, so ergibt sich die Amplitude als Fourier-Transformierte. Das Quadrat der Amplitude beschreibt die Intensität des Lichts. Die Funktion $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (**sinus cardinalis**) heißt daher auch **Spaltfunktion**.

In Aufgabe 4.11 ist die Fourier-Transformierte eine reelle Funktion. Dies muss aber nicht immer der Fall sein, da die Spektralfunktion eine komplexwertige Funktion ist, also eine Funktion mit reellem Definitionsbereich und komplexem Wertebereich.

Zum Beispiel ergibt sich für die Fourier-Transformierte der Funktion f:

$$f(t) = \begin{cases} -t + 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$F(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2} + j \cdot \left(\frac{\sin(\omega) - \omega}{\omega^2}\right)$ für $\omega \neq 0$ und $F(\omega) = \frac{1}{2}$ für $\omega = 0$

Die Fourier-Transformierte F(ω) ist komplex, sie kann daher nicht grafisch dargestellt werden, das Amplitudenspektrum $A(\omega) = |F(\omega)|$ allerdings schon:

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\omega \cdot \sin(\omega) - 2 \cdot \cos(\omega) + 2}}{\omega^2}$$

Wie bei der Fourier-Reihe ergeben sich für gerade und ungerade Funktionen Vereinfachungen. Mithilfe der Euler'schen Formel kann gezeigt werden, dass die Fourier-Transformierte von geraden Funktionen reell und von ungeraden Funktionen imaginär ist.

Vereinfachungen für gerade und ungerade Funktionen

f(t) ... gerade Funktion: $F(\omega) = 2 \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(\omega t)\, dt$

f(t) ... ungerade Funktion: $F(\omega) = -2j \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt$

4.12 Ermittle die Fourier-Transformierte der dargestellten Funktion und stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar. Gib die Symmetrieeigenschaft und die damit verbundene mögliche Vereinfachung an.

ABC

Lösung:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f(t) ist eine ungerade Funktion, daher kann eine Vereinfachung getroffen werden.

$\omega \neq 0$: $F(\omega) = -2j \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(\omega t)\, dt = -2j \cdot \int_0^1 1 \cdot \sin(\omega t)\, dt = -2j \cdot \left(-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\Big|_0^1\right) = 2j \cdot \left(\frac{\cos(\omega) - 1}{\omega}\right)$

$F(\omega = 0) = -2j \cdot \int_0^1 1 \cdot \sin(0)\, dt = 0$

$A(\omega) = 2 \cdot \left|\frac{\cos(\omega) - 1}{\omega}\right|, \omega \neq 0$

Auf der folgenden Seite werden Eigenschaften der Fourier-Transformation und die Fourier-Transformierten wichtiger Funktionen angegeben.

Integraltransformationen

Fourier-Transformation

Linearität (Additionssatz)	$\mathcal{F}\{a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)\} = a \cdot F_1(\omega) + b \cdot F_2(\omega),\ a, b \in \mathbb{C}$
Ähnlichkeitssatz	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j \cdot \omega t_0} \cdot F(\omega)$
Dämpfungssatz	$\mathcal{F}\{f(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$
Rechteckimpuls $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(a \cdot \omega)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2a & \text{für } \omega = 0 \end{cases}$
Einseitiger Exponentialimpuls $f(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$F(\omega) = \frac{1}{a + j \cdot \omega}$
Dirac-Impuls $\delta(t)$	$F(\omega) = 1$
$f(t) = 1$	$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
$f(t) = \cos(a \cdot t)$	$F(\omega) = \pi[\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$
$f(t) = \sin(a \cdot t)$	$F(\omega) = j \cdot \pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$

TE

Technologieeinsatz: Fourier-Transformation
Mathcad

Mithilfe der **Auswertung symbolischer Kennwörter** kann die Fourier-Transformierte ermittelt werden. Das Schlüsselwort ist **fourier**, gefolgt von der Variablen.

$f(t) := \frac{\sin(t)}{t}$

$gf(\omega) := f(t)\ \text{fourier}, t \rightarrow -\pi \cdot (\Phi(\omega - 1) - \Phi(\omega + 1))$

Die Transformierte wird in Abhängigkeit von ω ausgegeben. Die Funktion $\Phi(\omega)$ ist die Heaviside'sche Sprungfunktion.

BD TE

4.13 Gegeben ist die Gauß'sche Glockenkurve mit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$. Zeige, dass die Fourier-Transformierte wieder dieselbe Bauart hat.

Lösung mit Mathcad:

Gauss-Funktion: $f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}$

Fourier-Transformation

- mit Integral: $\text{Transformierte}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}\, dt \rightarrow e^{\frac{-1}{2} \cdot \omega^2}$

- mithilfe eines Schlüsselworts: $\text{Transf}(\omega) := f(t)\ \text{fourier}, t \rightarrow e^{\frac{-1}{2} \cdot \omega^2}$

$t := -5, -4.99 .. 5$ $\omega := -5, -4.99 .. 5$

Da die Funktionsgleichung von F die Form $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ hat, ist sie eine Glockenkurve.

4.14 Leite mithilfe der in der Tabelle auf Seite 104 angegebenen Sätze die Fourier-Transformierte der Sinusfunktion $f(t) = \sin(a \cdot t)$ her. AB

Lösung:

$\sin(a \cdot t) = \frac{1}{2j} \cdot (e^{j \cdot a \cdot t} - e^{-j \cdot a \cdot t})$

$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j} \cdot (e^{j \cdot a \cdot t} - e^{-j \cdot a \cdot t})\right\} = \frac{1}{2j} \cdot \{\mathcal{F}(1 \cdot e^{j \cdot a \cdot t}) - \mathcal{F}(1 \cdot e^{-j \cdot a \cdot t})\} =$

$= \frac{1}{2j} \cdot [2\pi\delta(\omega - a) - 2\pi\delta(\omega + a)] =$

$= j \cdot \pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$

- Vergleiche Seite 38.
- Mithilfe des Additionssatzes so zerlegen, dass der Dämpfungssatz angewendet werden kann.
- $1 ○\!\!-\!\!● 2\pi\delta(\omega)$

4.15 Gegeben ist die Spektralfunktion $F(\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$. Ermittle die Zeitfunktion f(t) BC

1) mithilfe der inversen Fourier-Transformation und

2) mithilfe der Sätze und Korrespondenzen aus der Tabelle von Seite 104.

Lösung:

1) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega =$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega = e^{j \cdot \omega_0 t}$

2) $F(\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$

$f(t) = 1 \cdot e^{j \cdot \omega_0 t} = e^{j \cdot \omega_0 t}$

- Einsetzen in das Fourier-Integral
- Anwenden der Ausblendeigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t)\, dt = f(t_0)$
- $2\pi\delta(\omega) ●\!\!-\!\!○ 1$
- $\mathcal{F}\{f(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$

4.16 F(ω) ist die Spektralfunktion einer gegebenen Zeitfunktion f(t). Beschreibe mit eigenen Worten, welche Auswirkungen die Änderungen bei der Zeitfunktion auf die Spektralfunktion haben bzw. umgekehrt. CD

1) $f(2t)$ ***2)*** $f\left(\frac{t}{4}\right)$ ***3)*** $f(t + 1)$ ***4)*** $F(\omega - 2)$ ***5)*** $F(2\omega)$

4.17 Ermittle die Fourier-Transformierte der gegebenen Funktion f(t) mithilfe des Integrals. B

a) Rechteckimpuls für $-a \leqslant t \leqslant a$ ***b)*** $f(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \sigma(t)$

4.18 Gib die Fourier-Transformierte der dargestellten Funktion an. Nutze dabei die Vereinfachungen für gerade und ungerade Funktionen. Stelle das Amplitudenspektrum und – wenn möglich – die Spektralfunktion grafisch dar. Begründe, warum das möglich bzw. nicht möglich ist. BCD TE

a)

b)

4.19 Leite mithilfe der in der Tabelle von Seite 104 angegebenen Sätze die Fourier-Transformierte von $f(t) = \cos(a \cdot t)$ her. AB

4.20 Gegeben ist der Rechteckimpuls $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leqslant a \cdot t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ BCD TE

1) Skizziere den Graphen für a = 1 und a = 2.

2) Verwende die Tabelle von Seite 104 und gib die Fourier-Transformierte mithilfe des Ähnlichkeitssatzes an.

3) Stelle die Spektralfunktionen für a = 1 und a = 2 grafisch dar und beschreibe die Unterschiede der Graphen.

4.3 Laplace-Transformation

4.3.1 Definition und wichtige Sätze

Die im vorangegangenen Abschnitt besprochene Fourier-Transformation ist für Funktionen mit dem Definitionsbereich $]-\infty; +\infty[$ definiert. Im Gegensatz dazu geht die **Laplace-Transformation** von (zeitabhängigen) Funktionen mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, so genannten kausalen Zeitfunktionen, aus. Sie wird deshalb auch einseitige Laplace-Transformation genannt und ist nach dem französischen Mathematiker und Astronomen Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827) benannt. Der österreichisch-ungarische Mathematiker Josef Maximilian Petzval (1807 – 1891) arbeitete ebenfalls an der Entwicklung der Laplace-Transformation. Aber nachdem er fälschlicherweise des Plagiats beschuldigt wurde, wurde die Transformation nach Laplace benannt.

Pierre de Laplace

Da die Fourier-Transformierte für viele Funktionen aufgrund des unbestimmten Integrals nicht existiert, wird bei der Laplace-Transformation die Funktion mithilfe einer Exponentialfunktion gedämpft.

BC **4.21** Die Funktion $f(t) = t \cdot \sigma(t)$ wird als Rampenfunktion bezeichnet.
1) Ermittle den Flächeninhalt unter der Kurve im Bereich $[0; \infty[$.
2) Multipliziere die Funktion f mit $y = e^{-t}$. Vergleiche die Funktionsgraphen von f und $f \cdot y$.
3) Berechne nun das Integral $\int_0^\infty t \cdot e^{-t}\, dt$ und vergleiche das Ergebnis mit dem aus ***1)***.

Die Laplace-Transformierte einer Funktion f erhält man durch folgende Funktion F.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}$$

Mit $s = a + j \cdot \omega$ erhält man: $\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(a + j \cdot \omega) \cdot t}\, dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\, dt$

Dies entspricht der Fourier-Transformierten der Funktion $f(t) \cdot e^{-at}$, die eine Dämpfung von f(t) ist. Bei vielen Anwendungen bezeichnet man s als komplexe Frequenz (Einheit: $\frac{1}{\text{Sekunde}}$).

Bei der **Laplace-Transformation** wird der Funktion f(t) mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ eine Funktion $F(s)$ $(s \in \mathbb{C})$ zugeordnet.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

Die Funktion F(s) heißt **Laplace-Transformierte** von f(t), falls das Integral konvergiert.

Das Integral ist konvergent, wenn f(t) auf $[0; \infty[$ stückweise stetig ist und nicht schneller wächst als eine Exponentialfunktion $y = K \cdot e^{b \cdot t}$. Für $Re(s) > b$ konvergiert das Integral dann. Man muss daher für die Variable s jenen Bereich angeben, für den das uneigentliche Integral konvergiert.

Die Funktion f(t) wird als **Originalfunktion**, die Funktion F(s) als **Bildfunktion** bezeichnet.
Für die Laplace-Transformation werden folgende Schreibweisen verwendet:

- $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
- $f(t) ○\!\!-\!\!\bullet F(s)$ … **Korrespondenz**: Beim Korrespondenzsymbol ○—● befindet sich der volle Kreis immer auf der Seite der Bildfunktion.

Die Bildfunktion F(s) hängt nur von der komplexen Zahl $s = a + j\omega$ ab. Ist $a = 0$, so erhält man $F(s) = F(j\omega)$, was der (einseitigen) Fourier-Transformierten von f(t) entspricht. Für weitere Überlegungen beschränken wir uns im Folgenden auf $s \in \mathbb{R}$.

ZB: Es soll die Laplace-Transformierte der Sprungfunktion $\sigma(t)$ berechnet werden, also $\mathcal{L}\{\sigma(t)\}$.
Die Sprungfunktion ist definiert durch: $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-s \cdot t}\,dt = \lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left[\left(-\tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot b} + \tfrac{1}{s} \cdot e^0\right)\right] = \lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot b}\right) + \tfrac{1}{s}$$

Das Integral konvergiert, wenn der Grenzwert $\lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot b}\right)$ existiert. Dies ist für $s > 0$ der Fall und es gilt dann: $\lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot b}\right) = 0$

Somit erhält man: $F(s) = \tfrac{1}{s}$

Das ist die Laplace-Transformierte von $f(t) = 1$ bzw. $\sigma(t)$ und man schreibt:

$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \tfrac{1}{s}$ bzw. $\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{s}$ bzw. $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{s}$ mit $s > 0$

4.22 Berechne die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = t^2$. **B**

Lösung:

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-s \cdot t}\,dt$$

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-s \cdot t}\,dt = \lim_{b \to \infty}\left(-t^2 \cdot \tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^b\right) + \tfrac{2}{s} \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-s \cdot t}\,dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty}\left(-t^2 \cdot \tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^b\right) + \tfrac{2}{s} \cdot \left[\lim_{b \to \infty}\left(-t \cdot \tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^b\right) + \tfrac{1}{s} \cdot \underbrace{\int_0^\infty 1 \cdot e^{-s \cdot t}\,dt}_{\mathcal{L}\{1\}}\right]$$

- Zweimalige partielle Integration (vgl. Band 3, Abschnitt 5.3.2)

Berechnung der uneigentlichen Integrale:

$$\lim_{b \to \infty}\left(-t^2 \cdot \tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s} \cdot b^2 \cdot e^{-s \cdot b} - 0\right) = 0,$$

da $\lim_{b \to \infty}\left(\frac{b^2}{s \cdot e^{s \cdot b}}\right) = \lim_{b \to \infty}\left(\frac{2b}{s^2 \cdot e^{s \cdot b}}\right) = \lim_{b \to \infty}\left(\frac{2}{s^3 \cdot e^{s \cdot b}}\right) = 0$ für $s > 0$

$$\lim_{b \to \infty}\left(-t \cdot \tfrac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\Big|_0^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s} \cdot b \cdot e^{-s \cdot b} - 0\right) = 0 \quad \text{für } s > 0$$

$$\int_0^\infty t^2 \cdot e^{-s \cdot t}\,dt = 0 + \tfrac{2}{s} \cdot \left(0 + \tfrac{1}{s} \cdot \tfrac{1}{s}\right) = \tfrac{2}{s^3} \quad s > 0$$

$t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{2}{s^3}, s > 0$

- Regel von de l'Hospital (vgl. Band 3, Abschnitt 3.9)
- $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{s}$

4.23 Berechne die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = e^{-a \cdot t}$. **B**

Lösung:

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-a \cdot t}\} = \int_0^\infty e^{-a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a) \cdot t}\,dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s+a} \cdot e^{-(s+a) \cdot t}\Big|_0^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s+a} \cdot e^{-(s+a) \cdot b} + \tfrac{1}{s+a}\right) = \tfrac{1}{s+a},$$

da $\lim_{b \to \infty}\left(-\tfrac{1}{s+a} \cdot e^{-(s+a) \cdot b}\right) = 0$ für $s + a > 0$

$e^{-a \cdot t} \circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{s+a}, s > -a$

TE

GeoGebra: www.hpt.at

Technologieeinsatz: Laplace-Transformation
Mathcad

Hier kann über die **Auswertung symbolischer Kennwörter** eine Funktion transformiert werden. Das Schlüsselwort ist **laplace**, gefolgt von der Variablen.

$$e^t \text{ laplace}, t \rightarrow \frac{1}{s-1}$$

TI-Nspire

1.1 *Nicht gespeicherte

$$\int_0^{\infty}\left(t\cdot e^{-s\cdot t}\right)dt|s>0 \qquad \frac{1}{s^2}$$

Die Berechnung der Laplace-Transformierten kann mithilfe des Integrals erfolgen. Dabei muss die Bedingung für die Konvergenz eingegeben werden.

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Die aufwändige Berechnung der Laplace-Transformierten durch Integration ist meist nicht notwendig. Die Laplace-Transformierten von häufig vorkommenden Funktionen werden in so genannten **Korrespondenztabellen** (siehe Seite 113) angegeben. Viele weitere Laplace-Transformierte lassen sich mithilfe grundsätzlicher Überlegungen, die auf die im Folgenden angeführten Sätze führen, angeben.

ZB: Betrachtet man die Korrespondenzen $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ und $e^{-a\cdot t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$, so könnte man $f(t) = e^{-a\cdot t}$ auch als $f(t) = 1 \cdot e^{-a\cdot t}$ auffassen. Der (dämpfende) Faktor bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich um a, das heißt, s wird durch (s + a) ersetzt. Das gilt auch für beliebige Funktionen.

Linearität

Wird eine Funktion mit einem konstanten Faktor multipliziert, so kann mithilfe der Faktorregel der Integralrechnung folgender Zusammenhang gezeigt werden:

$$\mathcal{L}\{a\cdot f(t)\} = \int_0^{\infty} a\cdot f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt = a\cdot\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt = a\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Ebenso folgt aus der Summenregel, dass die Summe von Funktionen gliedweise transformiert werden kann (vgl. Aufgabe 4.43). Zusammengefasst ergibt sich:

Linearität (Additionssatz)

$$\mathcal{L}\{a\cdot f_1(t) + b\cdot f_2(t)\} = a\cdot\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\cdot\mathcal{L}\{f_2(t)\} = a\cdot F_1(s) + b\cdot F_2(s)$$

BC **4.24** Ermittle die Laplace-Transformierte der gegebenen Funktion. Dokumentiere, welche Korrespondenzen und Regeln du anwendest.

$f(t) = 2 - 3t^2 + 4e^{2t}$

Lösung:

$$F(s) = \mathcal{L}\{2 - 3t^2 + 4e^{2t}\} =$$
$$= 2\cdot\mathcal{L}\{1\} - 3\cdot\mathcal{L}\{t^2\} + 4\cdot\mathcal{L}\{e^{2t}\} =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{s} - 3\cdot\frac{2}{s^3} + 4\cdot\frac{1}{s-2}$$

Da die Funktion eine Summe von Funktionen ist, können die Summanden gliedweise transformiert werden.

$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$, $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3}$, $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$

BD

4.25 Zeige mithilfe des Zusammenhangs $\sin(t) = \frac{e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t}}{2j}$, dass $\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ gilt.

Lösung:

$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t})\right\} = \frac{1}{2j}(\mathcal{L}\{e^{j \cdot t}\} - \mathcal{L}\{e^{-j \cdot t}\}) =$ ● Linearität

$= \frac{1}{2j} \cdot \left(\frac{1}{s - j} - \frac{1}{s + j}\right) = \frac{1}{2j} \cdot \left(\frac{s + j - s + j}{(s - j) \cdot (s + j)}\right) = \frac{1}{s^2 + 1}$ ● $e^{at} ∘\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s - a}$

$\sin(t) ∘\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2 + 1}, s > 0$

Ähnlichkeitssatz

Wird die Variable t der Funktion f(t) mit einer Konstanten a multipliziert, so bedeutet dies für den Graphen der Funktion $f(a \cdot t)$, dass er gegenüber f(t) in t-Richtung um den Faktor a gestreckt ($0 < a < 1$) oder gestaucht ($a > 1$) wird. Für die Transformierte verhält es sich umgekehrt.

f(t) = sin(t)

f(t) = sin(0,5 · t)

$$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \int_0^\infty f(a \cdot t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-\frac{s}{a} \cdot u} \cdot \frac{1}{a}\, du = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Substitution: $u = a \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = a \Rightarrow dt = \frac{1}{a}\, du$

Ähnlichkeitssatz

$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$ mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $a > 0$

Mithilfe dieses Satzes und mit Aufgabe 4.25 kann die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sin(\omega t)$ ermittelt werden.

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Verschiebungssatz

Wird zum Beispiel der Graph der Funktion $f(t) = t^2$ ($t \geqslant 0$) um 2 in positive t-Richtung verschoben, so lautet die neue Funktionsgleichung $g(t) = (t - 2)^2$ für $t \geqslant 2$.
Diese kann auch durch f(t) ausgedrückt werden: $g(t) = f(t - 2)$
Allgemein ist der Graph der Funktion $f(t - a)$ der um $a > 0$ verschobene Graph der Funktion f(t).
Für $t < a$ gilt: $f(t - a) = 0$
Das entspricht einem Einschaltvorgang, der zum Zeitpunkt $t = a$ erfolgt.

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = \int_a^\infty f(t - a) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-s \cdot (u + a)}\, du = \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-s \cdot u} \cdot e^{-s \cdot a}\, du = e^{-a \cdot s} \cdot \underbrace{\int_0^\infty f(u) \cdot e^{-s \cdot u}\, du}_{\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Substitution: $u = t - a \Rightarrow t = u + a \Rightarrow dt = du$

Verschiebungssatz

$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$ mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $a > 0$

B **4.26** Ermittle die Laplace-Transformierte.

a) $f(t) = (t-2)^2$ für $t \geqslant 2$ ***b)*** $f(t) = 2 \cdot e^{t-3}$ für $t \geqslant 3$

Lösung:

a) $\mathcal{L}\{(t-2)^2\} = e^{-2s} \cdot \frac{2}{s^3}$

- Verschiebungssatz; $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3}$

b) $\mathcal{L}\{2 \cdot e^{t-3}\} = 2 \cdot \mathcal{L}\{e^{t-3}\} = 2 \cdot e^{-3 \cdot s} \cdot \frac{1}{s-1}$

- Verschiebungssatz; $e^{a \cdot t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$

Dämpfungssatz

Die Multiplikation einer Funktion mit der Exponentialfunktion $y = e^{-a \cdot t}$ bewirkt eine Dämpfung, wie zum Beispiel bei der gedämpften Schwingung $y = e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$.

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-t \cdot (s+a)}\, dt = F(s+a)$$

Dämpfungssatz

$\mathcal{L}\{f(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = F(s+a)$ mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $a \in \mathbb{R}$

Vergleicht man den Verschiebungssatz mit dem Dämpfungssatz, so sieht man, dass eine Verschiebung der Funktion im Originalbereich eine Dämpfung der Laplace-Transformierten ergibt. Wird die Originalfunktion gedämpft, so ergibt dies eine Verschiebung im Bildbereich.

BC **4.27** Ermittle die Laplace-Transformierte und dokumentiere deine Vorgehensweise.

a) $f(t) = 5 \cdot e^{-4t}$ ***b)*** $f(t) = e^{-2t} \cdot \sin(3t)$

Lösung:

a) Da der Faktor e^{-4t} eine Dämpfung auf die Funktion $y = 5$ bewirkt, wird die konstante Funktion transformiert und dabei das Argument s durch $(s + 4)$ ersetzt.

$5 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{5}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{5 \cdot e^{-4t}\} = \frac{5}{s+4}$

b) Die Funktion $y = \sin(3t)$ wird durch e^{-2t} gedämpft. Bei der Transformation von $y = \sin(3t)$ wird das Argument s durch $(s + 2)$ ersetzt.

$\sin(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{3}{s^2+9} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-2t} \cdot \sin(3t)\} = \frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{3}{s^2+4s+13}$

Differentiationssätze

Um den Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten einer Funktion und deren Ableitung zu untersuchen, geht man von einer transformierbaren Funktion f(t) mit $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ aus und bildet die Laplace-Transformierte der 1. Ableitung $f'(t)$.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$$

$$\int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = \lim_{b \to \infty} \left(e^{-s \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^b\right) + s \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(e^{-s \cdot b} \cdot f(b) - f(0)\right) + s \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

- Partielle Integration
  $u = e^{-s \cdot t} \Rightarrow u' = -s \cdot e^{-s \cdot t}$
  $v' = f'(t) \Rightarrow v = f(t)$
- Da f(t) Laplace-transformierbar ist, gilt: $\lim_{b \to \infty} (f(b) \cdot e^{-s \cdot b}) = 0$

Dem Ableiten der Originalfunktion entspricht also die Multiplikation der Laplace-Transformierten mit s und die anschließende Subtraktion des Funktionswerts f(0). Hat die Funktion an der Stelle $t = 0$ keinen definierten Funktionswert, so entspricht f(0) dem rechtsseitigen Grenzwert. Zur Verdeutlichung schreibt man dann $f(0^+)$.

Durch analoge Überlegungen erhält man für die 2. Ableitung:
$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$ und allgemein:

Differentiationssatz (für die Originalfunktion)
$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$,
wenn die Ableitungen existieren und $f^{(k)}(0)$ die Anfangs- oder Grenzwerte sind.

Speziell: $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s \cdot F(s) - f(0)$
$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$
$f'''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$

Nun leiten wir die Laplace-Transformierte F(s) einer Funktion f(t) ab, bilden also $F'(s) = \frac{dF(s)}{ds}$.

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt\right) = \int_0^\infty \left(\frac{d}{ds}\left(f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\right)\right) dt = \int_0^\infty \left(f(t) \cdot (-t) \cdot e^{-s \cdot t}\right) dt = \mathcal{L}\{-t \cdot f(t)\} = F'(s)$$

Dies kann auch in der Form $\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F'(s)$ geschrieben werden, das heißt, die Multiplikation der Originalfunktion mit t ergibt die negative Ableitung der Bildfunktion.

Multiplikationssatz (Differentiationssatz für die Bildfunktion)
$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$ bzw. $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n \cdot f(t)\}$

4.28 Erkläre die Vorgehensweise bei folgender Ermittlung der Laplace-Transformierten.
$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\} - \sin(0) = \frac{s}{s^2 + 1}$

D

Lösung:
Da die Cosinusfunktion die abgeleitete Sinusfunktion ist, also $(\sin(t))' = \cos(t)$ gilt, kann der Differentiationssatz $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s \cdot F(s) - f(0)$ angewendet werden.
Mit $\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ und $\sin(0) = 0$ ergibt sich obige Laplace-Transformierte.

4.29 Ermittle $\mathcal{L}\{t \cdot \sin(t)\}$ mithilfe des Multiplikationssatzes.

B

Lösung:
$\mathcal{L}\{t \cdot \sin(t)\} = (-1) \cdot F'(s) = (-1) \cdot \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)' = (-1)^2 \cdot (s^2 + 1)^{-2} \cdot (2s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$

Integrationssätze
Analog zu den Differentiationssätzen kann man die Laplace-Transformierte des Integrals der Funktion f(t) bzw. die Originalfunktion bei Integration der Bildfunktion untersuchen. Die beiden nachfolgenden Sätze werden ohne Beweis angeführt.

Integrationssatz (für die Originalfunktion)
$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$ mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Divisionssatz (Integrationssatz für die Bildfunktion)
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot f(t)\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du$

BC **4.30** Ermittle die Laplace-Transformierte f(t) = t mithilfe des Integrationssatzes. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung:
Die Funktion f(t) = t kann als Integral der Funktion g(t) = 1 aufgefasst werden.

$\int_0^t 1\,d\tau = \tau\Big|_0^t = t$

Mit $1 \multimap \frac{1}{s}$ ergibt sich: $\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t 1\,d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

BCD **4.31** Mithilfe der Laplace-Transformation kann gezeigt werden, dass $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ gilt.

1) Zeige, dass gilt: $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot \sin(t)\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$

2) Berechne $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ mithilfe von ***1)*** und dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung:

1) Durch Anwenden des Divisionssatzes und der Korrespondenz $\sin(t) \multimap \frac{1}{s^2+1}$ ergibt sich:

$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot \sin(t)\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du$

Die Auswertung des uneigentlichen Integrals erfolgt durch Bilden des Grenzwerts.

$\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du = \lim_{b \to \infty}\left(\arctan(u)\Big|_s^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left(\arctan(b) - \arctan(s)\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$

2) Mithilfe der Definition der Laplace-Transformierten und s = 0 erhält man:

$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} \cdot \sin(t)\right\} = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \cdot e^{-s \cdot t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

Damit ergibt sich: $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$

Grenzwertsätze

Ist die Funktion F(s) im Bildbereich bekannt, so kann der Funktionswert der Originalfunktion f(t) zu Beginn (t = 0) oder am Ende (t = ∞) angegeben werden, ohne diese zu ermitteln. Man spricht vom Anfangswert $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+}(f(t))$ und vom Endwert $f(\infty) = \lim_{t \to \infty}(f(t))$ der Funktion.

Anfangs- und Endwertsatz

$\lim_{t \to 0^+}(f(t)) = \lim_{s \to \infty}(s \cdot F(s)) \qquad \lim_{t \to \infty}(f(t)) = \lim_{s \to 0}(s \cdot F(s))$

BC **4.32** Bestimme den Anfangs- und den Endwert der Originalfunktion von $F(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 13}$ und vergleiche die Ergebnisse mit jenen aus Aufgabe **4.27 *b)***.

Lösung:

$f(0^+) = \lim_{s \to \infty}(s \cdot F(s)) = \lim_{s \to \infty}\left(\frac{3 \cdot s}{s^2 + 4s + 13}\right) = 0$

$f(\infty) = \lim_{s \to 0}(s \cdot F(s)) = \lim_{s \to 0}\left(\frac{3 \cdot s}{s^2 + 4s + 13}\right) = 0$

Die Funktion F ist die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = e^{-2t} \cdot \sin(3t)$. Hierbei handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung mit f(0) = 0 und $\lim_{t \to \infty}(f(t)) = 0$.

Die folgende Korrespondenztabelle enthält neben den in den Aufgaben und Beispielen berechneten Laplace-Transformierten weitere häufig vorkommende Funktionen.

Korrespondenztabelle					
	f(t)	F(s)		f(t)	F(s)
1	$\delta(t)$	1	9	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
2	1 bzw. $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	10	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	11	$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$	12	$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
5	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	13	$e^{a \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	$e^{a \cdot t}$ bzw. $e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{s-a}$ bzw. $\frac{1}{s+a}$	14	$e^{a \cdot t} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
7	$t \cdot e^{a \cdot t}$ bzw. $t \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$ bzw. $\frac{1}{(s+a)^2}$	15	$\sinh(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s \cdot (1 + a \cdot s)}$	16	$\cosh(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

4.33 Berechne die Laplace-Transformierte der Funktion f(t) durch Integration. **B**

a) $f(t) = 5$ **b)** $f(t) = 2t$ **c)** $f(t) = e^{-t}$ **d)** $f(t) = 1 + 3e^{t}$

4.34 Gib an, welche Sätze angewendet werden können, um die Laplace-Transformierte der gegebenen Funktion f zu ermitteln. Begründe deine Antwort. **AD**

a) $f(t) = (3t)^4$ **b)** $f(t) = 2 \cdot \sin(t - 3)$ **c)** $f(t) = t^2 \cdot e^{t}$ **d)** $f(t) = \frac{\sinh(t)}{t}$

4.35 Zeige, dass bei Berechnung von $\mathcal{L}\{t^3 \cdot e^{-t}\}$ sowohl das Anwenden des Dämpfungssatzes als auch des Multiplikationssatzes auf dasselbe Ergebnis führt. **BD**

4.36 Berechne mithilfe des Additionssatzes und der obigen Korrespondenztabelle. **B**

a) $\mathcal{L}\{3t^3\}$ **c)** $\mathcal{L}\{\sin(2t) - 1\}$ **e)** $\mathcal{L}\{3e^{2t} - 2\}$ **g)** $\mathcal{L}\{\sin(t) - 2\cos(t)\}$

b) $\mathcal{L}\{t^4 + 2\}$ **d)** $\mathcal{L}\{4t + \cos(2t)\}$ **f)** $\mathcal{L}\{e^{-2t} + 3t - 2\}$ **h)** $\mathcal{L}\{2\sin(3t) + 2\}$

Aufgaben 4.37 – 4.39: Berechne jeweils die Laplace-Transformierte mithilfe der obigen Korrespondenztabelle und der geltenden Sätze.

4.37 **a)** $f(t) = \sin(t - 2)$ für $t \geqslant 2$ **b)** $f(t) = 5e^{t-1}$ für $t \geqslant 1$ **AB**

4.38 **a)** $f(t) = 2t^2 \cdot e^{-3t}$ **b)** $f(t) = (2 + 3t) \cdot e^{-5t}$ **c)** $f(t) = e^{-3t} \cdot \cos(2t)$ **d)** $f(t) = 5e^{-t} \cdot \sin(4t)$ **AB**

4.39 **a)** $f(t) = t^2 \cdot \cos(t)$ **b)** $f(t) = t^2 \cdot \sin(2t)$ **c)** $f(t) = \frac{\sinh(t)}{t}$ **d)** $f(t) = \frac{1 - e^{t}}{t}$ **AB**

4.40 Ermittle den Anfangs- und den Endwert der Originalfunktion von $F(s) = \frac{10}{s \cdot (2s + 1)}$. **B**

ABC **4.41** Stelle die Funktionsgleichung der dargestellten Funktion mithilfe der Sprungfunktion dar und ermittle anschließend die Laplace-Transformierte.

a) Rechteckimpuls ***b)*** Sägezahnkurve

Lösung:

a) $f(t) = \sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)$ • Anschreiben mithilfe der Sprungfunktion

$\mathcal{L}\{\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t - t_1)\} - \mathcal{L}\{\sigma(t - t_2)\} =$ • Additionssatz

$= e^{-t_1 \cdot s} \cdot \frac{1}{s} - e^{-t_2 \cdot s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{e^{-t_1 \cdot s} - e^{-t_2 \cdot s}}{s}$ • Verschiebungssatz $\sigma(t) ○\!\!-\!\!● \frac{1}{s}$

b)

$0 \leq t < T: \quad f_1(t) = \frac{1}{T} \cdot t$

$T \leq t < 2T: \quad f_2(t) = \frac{1}{T} \cdot t - 1$

$f(t) = \frac{1}{T} \cdot t - \sigma(t - T) - \sigma(t - 2T) - \ldots$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{T} \cdot t\right\} - \mathcal{L}\{\sigma(t - T)\} - \mathcal{L}\{\sigma(t - 2T)\} - \ldots =$ • Additionssatz

$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \cdot e^{-T \cdot s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-2T \cdot s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-3T \cdot s} - \ldots =$ • Verschiebungssatz

$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \cdot e^{-T \cdot s} \cdot (1 + e^{-T \cdot s} + e^{-2T \cdot s} + \ldots)$ $t ○\!\!-\!\!● \frac{1}{s^2}$, $\sigma(t) ○\!\!-\!\!● \frac{1}{s}$

$q = e^{-T \cdot s} \Rightarrow 1 + e^{-T \cdot s} + e^{-2T \cdot s} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-T \cdot s}} = \frac{e^{T \cdot s}}{e^{T \cdot s} - 1}$ • Die Summanden in den Klammern bilden eine geometrische Reihe.

$F(s) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \cdot e^{-T \cdot s} \cdot \frac{e^{T \cdot s}}{e^{T \cdot s} - 1} = \frac{e^{T \cdot s} - 1 - T \cdot s}{T \cdot s^2 \cdot (e^{T \cdot s} - 1)}$ • Summenformel: $S = \frac{1}{1 - q}$

ABC **4.42** Stelle die Funktionsgleichung der dargestellten Funktion mithilfe der Sprungfunktion dar und ermittle anschließend die Laplace-Transformierte.

a) ***b)*** ***c)***

BD **4.43** Zeige: $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$

BC **4.44** Ermittle die Laplace-Transformierte mittels Integration. Vergleiche dein Ergebnis mit der Korrespondenztabelle.

a) $\delta(t)$ ***b)*** $f(t) = t^n$ ***c)*** $f(t) = t \cdot e^{at}$ ***d)*** $f(t) = \sinh(at)$ ***e)*** $f(t) = \cosh(at)$

ABD **4.45** Mithilfe des Differentiationssatzes kann die Laplace-Transformierte von $f(t) = t \cdot \sin(\omega t)$ hergeleitet werden.

1) Zeige, dass gilt: $f''(t) = 2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - \omega^2 \cdot f(t)$

2) Leite daraus die Laplace-Transformierte von f her.

4.3.2 Rücktransformation

4.46 Versuche, mithilfe der Korrespondenztabelle die Originalfunktion f(t) der gegebenen Funktion zu bestimmen. Beschreibe, welche Umformungen dabei durchgeführt werden.

1) $F(s) = \frac{2}{s}$ **2)** $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$ **3)** $F(s) = \frac{2}{s \cdot (s + 4)}$

BC

Wurde eine Funktion zur Durchführung einer Berechnung in den Bildbereich transformiert, so muss die Bildfunktion danach wieder in den Originalbereich zurückgeführt werden. Diese Rücktransformation heißt **inverse Laplace-Transformation** und wird mit $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ bezeichnet. Da die direkte Berechnung der inversen Laplace-Transformierten sehr aufwändig ist, erfolgt die Rücktransformation üblicherweise mithilfe der Korrespondenztabelle.

ZB: Der Originalfunktion f(t) = sin(t) entspricht die Bildfunktion $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$.

Die inverse Laplace-Transformierte von $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ ist daher die Originalfunktion f(t) = sin(t).

Laplace-Transformation: $\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2 + 1}$ bzw. $\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$

Rücktransformation: $\frac{1}{s^2 + 1} \bullet\!\!-\!\!\circ \sin(t)$ bzw. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin(t)$

Oft entsprechen die Bildfunktionen F(s) nicht genau den in der Korrespondenztabelle angegebenen Funktionen. Durch Herausheben konstanter Faktoren und geschicktes Umformen muss daher F(s) in Korrespondenzen, die in der Tabelle vorkommen, zerlegt werden.

4.47 Ermittle die Originalfunktion f(t) der gegebenen Laplace-Transformierten F(s).

B

a) $F(s) = \frac{1}{2s - 1}$ **c)** $F(s) = \frac{3}{2s - 4} + \frac{5}{s^3}$ **e)** $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s - 3}$

b) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 9}$ **d)** $F(s) = \frac{s - 4}{s^2 + 4} + \frac{7}{(s + 4)^2}$

Lösung:

a) $F(s) = \frac{1}{2s - 1} = \frac{1}{2 \cdot \left(s - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - \frac{1}{2}}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t}$

- Um die Korrespondenz $\frac{1}{s - a} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{at}$ anwenden zu können, muss 2 herausgehoben werden.

b) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 9} = \frac{1}{s^2 - 3^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2 - 3^2}$

$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \sinh(3t)$

- Um $\frac{a}{s^2 - a^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \sinh(at)$ anzuwenden, hebt man $\frac{1}{3}$ heraus.

c) $F(s) = \frac{3}{2s - 4} + \frac{5}{s^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s - 2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{s^3}$

$f(t) = \frac{3}{2} \cdot e^{2t} + \frac{5}{2} \cdot t^2$

- $\frac{1}{s - a} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{at}$, $\frac{2}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ t^2$

d) $F(s) = \frac{s - 4}{s^2 + 4} + \frac{7}{(s + 4)^2} = \frac{s}{s^2 + 2^2} - \frac{2 \cdot 2}{s^2 + 2^2} + 7 \cdot \frac{1}{(s + 4)^2}$

$f(t) = \cos(2t) - 2\sin(2t) + 7 \cdot t \cdot e^{-4t}$

- $\frac{s}{s^2 + \omega^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \cos(\omega t)$, $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \sin(\omega t)$, $\frac{1}{(s + a)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ t \cdot e^{-at}$

e) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s - 3}$

$f(t) = e^{3 \cdot (t - 2)}, t \geqslant 2$

bzw. $f(t) = e^{3 \cdot (t - 2)} \cdot \tau(t - 2)$

- Verschiebungssatz, $\frac{1}{s - a} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{at}$

B **4.48** Ermittle die Originalfunktion f(t) der gegebenen Laplace-Transformierten F(s).

$F(s) = \frac{2s + 5}{(s - 3)^2 + 4}$

Lösung:

$F(s) = \frac{2s + 5}{(s - 3)^2 + 4} = \frac{2s + 5}{(s - 3)^2 + 2^2}$

$2s + 5 = 2 \cdot (s - 3) + k$

$2s + 5 = 2s - 6 + k$

$k = 11$

$\frac{2s + 5}{(s - 3)^2 + 2^2} = \frac{2 \cdot (s - 3) + 11}{(s - 3)^2 + 2^2} =$

$= \frac{2 \cdot (s - 3)}{(s - 3)^2 + 2^2} + \frac{11}{(s - 3)^2 + 2^2} =$

$= 2 \cdot \frac{(s - 3)}{(s - 3)^2 + 2^2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{(s - 3)^2 + 2^2}$

$f(t) = 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos(2t) + \frac{11}{2} \cdot e^{3t} \cdot \sin(2t)$

- Um die Korrespondenz $\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$ •–○ $e^{at} \cdot \cos(\omega t)$ verwenden zu können, muss der Zähler (2s + 5) so umgeformt werden, dass ein Teilbruch mit dem Zähler (s − 3) entsteht.
- $\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$ •–○ $e^{a \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$

Da die Bildfunktionen häufig gebrochen rationale Funktionen sind, benötigt man bei der Rücktransformation oft die Partialbruchzerlegung.

ZB: $F(s) = \frac{2s^2 - 12s + 58}{s^3 - 4s^2 + 29s} = \frac{2s^2 - 12s + 58}{s \cdot (s^2 - 4s + 29)}$

Die Funktion entspricht keiner aus der Korrespondenztabelle, sie wird in Partialbrüche zerlegt.

$s \cdot (s^2 - 4s + 29) = 0 \;\Rightarrow\; s_1 = 0,\ s_{2,3} = 2 \pm 5j$
- Nullstellen des Nenners ermitteln

$\frac{2s^2 - 12s + 58}{s^3 - 4s^2 + 29s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - 4s + 29} \;\Rightarrow\; A = 2,\ B = 0,\ C = -4$
- Passenden Ansatz wählen

$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2 - 4s + 29}$
- Partialbrüche angeben

Auf den ersten Teilbruch kann die Korrespondenz Nr. 2 aus der Tabelle von Seite 113 angewendet werden. Um für den zweiten Teilbruch die Korrespondenz Nr. 13 verwenden zu können, muss dieser umgeformt werden.

$s^2 - 4s + 29 = s^2 - 4s + 4 - 4 + 29 = (s - 2)^2 + 5^2$
- Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat

$\frac{4}{s^2 - 4s + 29} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{(s - 2)^2 + 5^2}$
- Um die Formel $\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$ zu verwenden, formt man so um, dass der Zähler 5 lautet.

Mit $\frac{2}{s}$ •–○ 2 und $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{(s - 2)^2 + 5^2}$ •–○ $\frac{4}{5} \cdot e^{2t} \cdot \sin(5t)$ erhält man:

$f(t) = 2 - \frac{4}{5} \cdot e^{2t} \cdot \sin(5t)$

Beachte: $F_1(s) \cdot F_2(s) \neq \mathcal{L}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\}$

ZB: Die Originalfunktion von $F(s) = \frac{1}{s \cdot (s - 2)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s - 2}$ ist **nicht** $f(t) = 1 \cdot e^{2t}$, da $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s - 2}$.

Hier muss der so genannte **Faltungssatz** angewendet werden: $\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$

Das Faltungsprodukt ist definiert durch: $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u)\, du$

Aufgaben 4.49 – 4.58: Ermittle f(t) der gegebenen Laplace-Transformierten F(s).

4.49 **a)** $F(s) = \frac{3s + 4}{s^3 - 2s^2}$ **b)** $F(s) = \frac{5s^2 - 35s + 89}{(s - 2)\cdot(s^2 - 8s + 25)}$ B

Lösung:

a) $\frac{3s + 4}{s^3 - 2s^2} = \frac{3s + 4}{s^2\cdot(s - 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s - 2}$

$A = -\frac{5}{2}$, $B = -2$, $C = \frac{5}{2}$

$F(s) = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s} - 2\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s - 2}$

$f(t) = -\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}e^{2t}$

b) $\frac{5s^2 - 35s + 89}{(s - 2)\cdot(s^2 - 8s + 25)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B\cdot s + C}{s^2 - 8s + 25}$

$s^2 - 8s + 25 = 0 \;\Rightarrow\; s_{1,2} = 4 \pm 3j$

$A = 3$, $B = 2$, $C = -7$

$F(s) = \frac{3}{s - 2} + \frac{2s - 7}{s^2 - 8s + 25}$

$s^2 - 8s + 25 = (s - 4)^2 - 16 + 25 = (s - 4)^2 + 9$

$\frac{2s - 7}{(s - 4)^2 + 3^2} = \frac{2\cdot(s - 4) + 1}{(s - 4)^2 + 3^2} = 2\cdot\frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 3^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s - 4)^2 + 3^2}$

$f(t) = 3e^{2t} + 2e^{4t}\cdot\cos(3t) + \frac{1}{3}e^{4t}\cdot\sin(3t)$

- Zerlegung in Partialbrüche
- Die Teilbrüche können nun einzeln rücktransformiert werden.
- Der zweite Term hat keine reellen Nullstellen.
- Ein Teilbruch mit nicht weiter zerlegbarem quadratischen Nenner muss so umgeformt werden, dass die Korrespondenzen $\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \multimap e^{at}\cdot\cos(\omega t)$ oder $\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} \multimap e^{at}\cdot\sin(\omega t)$ angewendet werden können.

4.50 **a)** $F(s) = 4 - \frac{3}{s}$ **b)** $F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{s - 2}$ **c)** $F(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s}$ **d)** $F(s) = \frac{4}{s + 2} + \frac{2}{(s - 2)^2}$ B

4.51 **a)** $F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$ **b)** $F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$ **c)** $F(s) = \frac{2s}{s^2 + 16}$ **d)** $F(s) = \frac{4}{s^2 - 16}$ B

4.52 **a)** $F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$ **b)** $F(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$ **c)** $F(s) = \frac{3}{(s - 2)^2 + 9}$ **d)** $F(s) = \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 16}$ B

4.53 **a)** $F(s) = \frac{3}{s^2 + 1}$ **b)** $F(s) = \frac{2s}{s^2 - 25}$ **c)** $F(s) = \frac{5}{3s + 2}$ **d)** $F(s) = \frac{7}{s^2 + 9}$ B

4.54 **a)** $F(s) = \frac{14}{(s - 5)^2 + 9}$ **b)** $F(s) = \frac{3s - 4}{(s - 6)^2 + 49}$ **c)** $F(s) = \frac{12}{s^2 + 2s + 17}$ **d)** $F(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 2s + 5}$ B

4.55 **a)** $F(s) = \frac{3s + 6}{s^2 + 3s}$ **b)** $F(s) = \frac{-s - 3}{s^2 - 6s}$ **c)** $F(s) = \frac{9s + 20}{s^2 - 16}$ **d)** $F(s) = \frac{5s + 5}{6\cdot(s - 2)\cdot(s + 3)}$ B

4.56 **a)** $F(s) = \frac{5}{s^2 + 7s + 12}$ **b)** $F(s) = \frac{-4s^2 + 3s - 15}{s^3 - 5s^2}$ **c)** $F(s) = \frac{s - 2}{s^3 - s^2}$ **d)** $F(s) = \frac{3s}{s^2 - 6s + 9}$ B

4.57 **a)** $F(s) = \frac{-14s + 12}{s^3 - 4s^2 + 3s}$ **b)** $F(s) = \frac{s^2 + 6s + 6}{s^2\cdot(s + 2)^2}$ **c)** $F(s) = \frac{4s^2 + 2s - 2}{s^3 - s}$ **d)** $F(s) = \frac{9}{s^2\cdot(s - 1)\cdot(s + 3)}$ B

4.58 **a)** $F(s) = \frac{-s^2 - 2}{s^3 + s}$ **b)** $F(s) = \frac{-18}{s\cdot(s^2 + 9)}$ **c)** $F(s) = \frac{10}{s\cdot(s^2 + 6s + 10)}$ **d)** $F(s) = \frac{2s^2 - 11s + 17}{(s + 3)\cdot(s^2 - 4s + 13)}$ B

4.59 Ermittle die Originalfunktion und dokumentiere deine Vorgehensweise: $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^3}$ BC

4.60 Erkläre, welcher Fehler bei der Rücktransformation gemacht wurde. D

$F(s) = \frac{2}{s\cdot(s - 3)} = \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s - 3}$, $f(t) = 2\cdot e^{3t}$

4.3.3 Lösen von Differentialgleichungen mit der Laplace-Transformation

ABD **4.61** Gegeben ist die Differentialgleichung $y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$.

1) Löse die Anfangswertaufgabe.

2) Gib die Laplace-Transformierte der Gleichung mithilfe des Differentiationssatzes an. Setze dann $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Beschreibe, welche Art von Gleichung für die Variable Y(s) entsteht.

Die in der Mechanik oder Elektrotechnik häufig auftretenden Schwingungsgleichungen sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Im Folgenden wird gezeigt, wie Differentialgleichungen dieses Typs mithilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Da es sich im Allgemeinen um zeitabhängige Vorgänge handelt, setzen wir im Weiteren $y = y(t)$.

ZB: Es soll die Differentialgleichung $y' + 3y = e^{-2t}$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ gelöst werden.
Auf dem „herkömmlichen" Weg wird zuerst die homogene Lösung, dann die partikuläre Lösung berechnet und mithilfe des Anfangswerts die Konstante C bestimmt.

$y' + 3y = 0 \Rightarrow y_h = C \cdot e^{-3t}$

Ansatz: $y_p = a \cdot e^{-2t}, {y'}_p = -2a \cdot e^{-2t} \Rightarrow -2a \cdot e^{-2t} + 3a \cdot e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y_p = e^{-2t}$

$y(t) = C \cdot e^{-3t} + e^{-2t}, y(0) = 0{:}\ 0 = C + 1 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

Wendet man die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an, so erhält man:

$$\mathcal{L}\{y' + 3y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} + 3 \cdot \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

- Linearität der Laplace-Transformation

$$s \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) + 3 \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

- Für die Laplace-Transformierte der Ableitung $y'(t)$ gilt: $\mathcal{L}\{y'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)$

$$s \cdot Y(s) - 0 + 3 \cdot Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) \cdot (s + 3) = \frac{1}{s+2}$$

- $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ ist nun die gesuchte Variable und man erhält daher eine lineare Gleichung. Der Anfangswert wird direkt in diese lineare Gleichung eingesetzt. Die Störfunktion wird transformiert.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}$$

- Die Gleichung wird nach Y(s) umgeformt.

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

- Rücktransformation mithilfe der Partialbruchzerlegung

Durch die Transformation wird aus der Differentialgleichung eine lineare Gleichung. Dies gilt auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung, wenn die Koeffizienten konstant sind. Nach dem Differentiationssatz gilt für die n-te Ableitung einer Funktion:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n \cdot Y(s) - s^{n-1} \cdot y(0) - s^{n-2} \cdot y'(0) - \dots - s \cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Dabei tritt die Gleichungsvariable Y(s) nur linear auf. Die höchste Potenz von s entspricht der höchsten auftretenden Ableitung.

ZB: $\mathcal{L}\{y'' + py' + qy\} = \mathcal{L}\{y''\} + p \cdot \mathcal{L}\{y'\} + q \cdot \mathcal{L}\{y\} =$

$$= s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + p \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + q \cdot Y(s) =$$

$$= Y(s) \cdot (s^2 + p \cdot s + q) - s \cdot y(0) - y'(0) - p \cdot y(0)$$

Für $y(0)$ und $y'(0)$ werden die Anfangswerte direkt eingesetzt.
Somit können Differentialgleichungen gelöst werden, ohne differenzieren oder integrieren zu müssen. Da die Anfangswerte direkt eingesetzt werden, erhält man sofort die Lösungsfunktion.

Die Laplace-Transformation führt eine **lineare Differentialgleichung** mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangswerten in eine **lineare Gleichung** über. Die Lösung dieser Gleichung im Bildbereich wird anschließend rücktransformiert.

DGL $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ lineare Gleichung → Lösung der Gleichung $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ Lösung der DGL

Aufgaben 4.62 – 4.72: Löse die Anfangswertaufgaben mithilfe der Laplace-Transformation.

4.62 $y'' + 2y' + 2y = 6t,\ \ y(0) = 0, y'(0) = 2$ B

Lösung:

$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 2y\} = \mathcal{L}\{6t\}$

$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot \underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{2} + 2 \cdot (s \cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{0}) + 2 \cdot Y(s) = 6 \cdot \frac{1}{s^2}$ ● Laplace-Transformation

$Y(s) \cdot (s^2 + 2s + 2) - 2 = \frac{6}{s^2}$

$Y(s) \cdot (s^2 + 2s + 2) = \frac{6}{s^2} + 2$

$Y(s) = \frac{6 + 2s^2}{s^2 \cdot (s^2 + 2s + 2)}$ ● Lösung im Bildbereich

$Y(s) = \frac{6 + 2s^2}{s^2 \cdot (s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 2}$

$Y(s) = -\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{3s + 5}{s^2 + 2s + 2}$

$\frac{3s + 5}{s^2 + 2s + 2} = \frac{3 \cdot (s + 1) + 2}{(s + 1)^2 + 1} = 3 \cdot \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} + 2 \cdot \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$ ● Rücktransformation

$y(t) = -3 + 3t + 3e^{-t} \cdot \cos(t) + 2e^{-t} \cdot \sin(t)$

Differentialgleichungen 1. Ordnung

4.63 **a)** $y' + 4y = 0;\ \ y(0) = 3$ **c)** $y' - 6y = 3;\ \ y(0) = 2$ **e)** $f'(t) + 5 \cdot f(t) = 1;\ \ f(0) = 0$ B
b) $y' - 3y = 6t;\ \ y(0) = 0$ **d)** $\dot{x} + 3x = 3t - 5;\ \ x(0) = 2$ **f)** $y' + 3y = t - 3;\ \ y(0) = 1$

4.64 **a)** $y' + 2y = 3e^t;\ \ y(0) = 0$ **b)** $y' - 5y = e^{-3t};\ \ y(0) = 2$ B

4.65 **a)** $f'(t) - 2 \cdot f(t) = 3 \cdot \sin(t);\ \ f(0) = 5$ **c)** $y' - 6y = 10 \cdot \sin(5t);\ \ y(0) = 0$ B
b) $y' + y = \cos(2t) + 2;\ \ y(0) = 0$ **d)** $y' + 4y = 5 \cdot \cos(2t);\ \ y(0) = 1$ B

4.66 **a)** $y' - y = t \cdot e^t;\ \ y(0) = 1$ **b)** $y' + y = t \cdot e^t;\ \ y(0) = 1$ B

Differentialgleichungen 2. Ordnung

4.67 **a)** $y'' + y = 0;\ \ y(0) = 1, y'(0) = 0$ **c)** $\ddot{y} + 2\dot{y} = 0;\ \ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ B
b) $y'' - 4y = 0;\ \ y(0) = 2, y'(0) = 0$ **d)** $y'' - 3y' = 0;\ \ y(0) = 1, y'(0) = 1$

4.68 **a)** $y'' + 2y' - 3y = 0;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 4$ **b)** $y'' + 2y' - 8y = 0;\ \ y(0) = 3, y'(0) = 0$ B

4.69 **a)** $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0;\ \ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 2$ **b)** $y'' + 8y' + 16y = 0;\ \ y(0) = 1, y'(0) = 2$ B

4.70 **a)** $y'' + 4y' + 5y = 0;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1$ **b)** $y'' - 2y' + 2y = 0;\ \ y(0) = 1, y'(0) = 4$ B

4.71 **a)** $y'' + 3y' = 5;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 2$ **b)** $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 9;\ \ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ B

4.72 **a)** $2y'' - 8y = 3t;\ \ y(0) = 1, y'(0) = 0$ **b)** $y'' - 10y' + 9y = 72t;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0$ B

Aufgaben 4.73 – 4.74: Löse die Anfangswertaufgaben für $y(0) = y'(0) = 0$ mithilfe der Laplace-Transformation.

4.73 **a)** $y'' - 16y' + 64y = 128t + 128$ **b)** $y'' + 2y' + 2y = 4$ B

4.74 **a)** $y'' + 2y' + y = 8 \cdot \sin(t)$ **b)** $y'' + 2y' = 16 \cdot (\cos(2t) + \sin(2t))$ B

ABCD **4.75** An eine RC-Serienschaltung wird zum Zeitpunkt t = 0 s eine Eingangsspannung $u_e(t) = U_0 \cdot \sigma(t)$ angelegt. Die Spannung beträgt zu Beginn $u_C(0\,s) = 0\,V$.
Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\,d\tau, \quad i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}, \; u_R = R \cdot i$$

1) Erkläre die Bedeutung der Gleichung $u_R + u_C - u_e = 0$ und stelle mit deren Hilfe die Gleichung für den Stromverlauf i(t) bzw. für den Spannungsverlauf $u_C(t)$ auf.
2) Löse die Gleichungen mithilfe der Laplace-Transformation.
3) Ermittle jeweils den Grenzwert von i(t) und $u_C(t)$ für $t \to \infty$ mithilfe des Endwertsatzes und interpretiere das Ergebnis.
4) Stelle i und u_C für $U_0 = 200$ V, R = 50 kΩ und C = 100 μF grafisch dar.

Lösung:
1) Aufgrund der 2. Kirchhoff'schen Regel muss die Summe aller Spannungen in einem Stromkreis null sein. Die Vorzeichen ergeben sich aus der Zählrichtung.

Gleichung für den Stromverlauf: $R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\,d\tau = u_e$

Gleichung für den Spannungsverlauf: $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u_e$

2) Stromverlauf:

$$R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\,d\tau = U_0 \quad |\,\mathcal{L}$$

$$R \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot I(s) = \frac{U_0}{s}$$

$$I(s) \cdot \left(R + \frac{1}{C \cdot s}\right) = \frac{U_0}{s}$$

$$I(s) = \frac{U_0 \cdot C \cdot s}{s \cdot (RC \cdot s + 1)} = \frac{U_0 \cdot \cancel{C}}{R\cancel{C}\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Spannungsverlauf:

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 \quad |\,\mathcal{L}$$

$$RC \cdot s \cdot U_C(s) + U_C(s) = \frac{U_0}{s}$$

$$U_C(s) \cdot (RC \cdot s + 1) = \frac{U_0}{s}$$

$$U_C(s) = \frac{U_0}{s \cdot (RC \cdot s + 1)}$$

$$\frac{U_0}{s \cdot (RC \cdot s + 1)} = \frac{U_0}{s} - \frac{U_0 \cdot RC}{RC \cdot s + 1} = \frac{U_0}{s} - \frac{U_0 \cdot \cancel{RC}}{\cancel{RC}\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

$$u_C(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t})$$

3) $\lim\limits_{t \to \infty} (i(t)) = \lim\limits_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{U_0 \cdot C}{RC \cdot s + 1}\right) = 0$, der Strom sinkt von $\frac{U_0}{R}$ auf 0 A.

$\lim\limits_{t \to \infty} (u_C(t)) = \lim\limits_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{U_0}{s \cdot (RC \cdot s + 1)}\right) = U_0$, die Spannung steigt von 0 V auf U_0.

4)

Bemerkung: Es genügt, eine der beiden Funktionen zu ermitteln, die zweite ergibt sich aus dem Zusammenhang $i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$.

ABCD **4.76** Angabe wie in Aufgabe **4.75**. **a)** $u_e(t) = 100\,V \cdot t$ **b)** $u_e(t) = 50\,V \cdot e^t$

4.77 An eine RL-Serienschaltung wird zum Zeitpunkt t = 0 s eine Eingangsspannung $u_e(t) = 20$ V angelegt. Der Widerstand R beträgt 5 Ω und für die Spule gilt L = 2 H. Gib den Verlauf der Stromstärke i(t) an, wenn i(0 s) = 0 A gilt. Ermittle mithilfe des Endwertsatzes die Stromstärke für $t \to \infty$. Beschreibe deine Vorgehensweise beim Lösen mithilfe der Laplace-Transformation. Hinweis: $R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = u_e(t)$. BC

Technologieeinsatz: Lösen von Differentialgleichungen mit Laplace-Transformation

TE

Mathcad

Das Schlüsselwort für die Rücktransformation ist **invlaplace**, gefolgt von der Variablen.

$$\frac{1}{s^2} \text{ invlaplace}, s \to t$$

4.78 Ein gedämpftes Feder-Masse-System wird aus der Ruhelage durch eine periodische Kraft F(t) angeregt. Gib den Bewegungsverlauf y(t) an, wenn m = 1 kg, $b = 10\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $k = 50\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ und $F(t) = 50\text{ N} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t)$ sind. B TE

Lösung:

Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 10\frac{d}{dt}y(t) + 50\cdot y(t) = F(t) \qquad F(t) := 50\cdot\sin(2t) \qquad y(0) = 0, \frac{d}{dt}y(0) = 0$$

Transformation der Störfunktion:

$$F(t) \text{ laplace}, t \to \frac{100}{s^2 + 4}$$

Angabe der transformierten Gleichung:

$$s^2\cdot Y - s\cdot 0 - 0 + 10Y\cdot s - 0 + 50\cdot Y = \frac{100}{s^2 + 4}$$

"Auflösen" nach Y und Rücktransformation:

$$\frac{100}{(s^2+4)\cdot(s^2+10\cdot s+50)} \text{ invlaplace}, s \to \frac{-250}{629}\cdot\cos(2\cdot t) + \frac{575}{629}\cdot\sin(2\cdot t) + \frac{250}{629}\cdot e^{(-5)\cdot t}\cdot\cos(5\cdot t) + \frac{20}{629}\cdot e^{(-5)\cdot t}\cdot\sin(5\cdot t)$$

Lösungsfunktion:

$$y(t) := \frac{-250}{629}\cdot\cos(2\cdot t) + \frac{575}{629}\cdot\sin(2\cdot t) + \frac{250}{629}\cdot e^{(-5)\cdot t}\cdot\cos(5\cdot t) + \frac{20}{629}\cdot e^{(-5)\cdot t}\cdot\sin(5\cdot t)$$

4.79 Ein gedämpftes Feder-Masse-System wird aus der Ruhelage durch eine periodische Kraft $F(t) = 5\text{ kN} \cdot \sin(5\text{ s}^{-1} \cdot t)$ angeregt. Die Masse beträgt m = 200 kg, die Dämpfungskonstante $b = 5\,000\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ und die Federkonstante $k = 20\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. BC TE

1) Löse die Differentialgleichung $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + k \cdot y = F(t)$ mithilfe der Laplace-Transformation. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

2) Stelle y(t) grafisch dar.

4.80 Ein Reihenschwingkreis wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u_e(t)$. Berechne den Spannungsverlauf $u_C(t)$ mit $u_C(0\text{ s}) = 0$ V und i(0 s) = 0 A für R = 100 Ω, C = 100 μF, L = 0,5 H und $u_e(t) = 220$ V. BC TE

4.3.4 Übertragungsfunktionen

Mithilfe der Laplace-Transformation lassen sich auch Systeme beschreiben, die ein Eingangssignal in ein Ausgangssignal umwandeln. Das Objekt, das das Eingangssignal x(t) in das Ausgangssignal y(t) umwandelt, heißt **Übertragungsglied**.

Eingangssignal x(t) → Übertragungssystem → Ausgangssignal y(t)

Häufig werden lineare und zeitinvariante Übertragungssysteme (**LTI-Systeme**, engl.: Linear Time Invariant) verwendet.

„Linear" bedeutet in diesem Fall, dass falls das Eingangssignal eine Linearkombination von Signalen ist, auch das Ausgangssignal eine Linearkombination der zugehörigen Signale ist.
$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

„Zeitinvariant" bedeutet, dass eine zeitliche Verschiebung des Eingangssignals auf die gleiche Verschiebung des Ausgangssignal führt.
$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$

Die Energiespeicher werden vor dem Schalten als leer vorausgesetzt, das heißt, $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$.

ZB: RC-Glied (vgl. Aufgabe 4.75)

Differentialgleichung: $RC \cdot \frac{du_a(t)}{dt} + u_a(t) = u_e(t)$

Die Lösung der Differentialgleichung im Bildbereich ergibt:
$RC \cdot (s \cdot U_a(s) - u_a(0)) + U_a(s) = U_e(s)$

(Schaltbild: i(t), R, C, $u_e(t)$, $u_a(t)$)

Da $u_a(0) = 0$ ist erhält man: $U_a(s) \cdot (RC \cdot s + 1) = U_e(s)$

Bildet man nun den Quotienten von Ausgangs- zu Eingangssignal im Bildbereich $\frac{U_a(s)}{U_e(s)}$, so erhält man: $\frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{RC \cdot s + 1}$

Dieser Quotient hängt nicht vom Eingangs- und Ausgangssignal ab, sondern nur von der Art und den Größen des Übertragungssystems. Er wird **Übertragungsfunktion** G(s) genannt.

Unter der **Übertragungsfunktion** G(s) versteht man das Verhältnis von der Laplace-Transformierten der Ausgangsfunktion zur Laplace-Transformierten der Eingangsfunktion:
$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

Dieser Zusammenhang kann auch mithilfe der Faltung (vgl. Seite 116) hergeleitet werden. Für ein lineares Übertragungsglied gilt: $y(t) = g(t) * x(t)$
g(t) ist die so genannte Gewichtsfunktion. Transformiert man diese Gleichung, so erhält man:
$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$

Somit ist die Laplace-Transformierte der Gewichtsfunktion die Übertragungsfunktion und das Ausgangssignal Y(s) kann im Bildbereich durch Multiplikation des Eingangssignals X(s) mit G(s) ermittelt werden. Durch anschließende Rücktransformation erhält man das Ausgangssignal im Zeitbereich y(t).

Bemerkung: Die Übertragungsfunktion G(s) entspricht der komplexen Übertragungsfunktion, wenn man $s = j\omega$ setzt: $G(s) = G(j\omega)$

Spezielle Ausgangssignale

- Impulsantwort: Ausgangssignal, wenn das Eingangssignal ein Impuls $\delta(t)$ ist.
- Sprungantwort: Ausgangssignal, wenn das Eingangssignal ein Sprung $\sigma(t)$ ist.

Schaltelemente im Laplace-Bildbereich

Schaltelement	Schaltsymbol	Zeitbereich	Bildbereich
Ohm´scher Widerstand R	R	$u_R(t) = R \cdot i(t)$	$U_R(s) = R \cdot I(s)$
Induktiver Widerstand L Spule	L	$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$	$U_L(s) = L \cdot s \cdot I(s)$
Kapazitiver Widerstand C Kondensator	C	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau)\, d\tau$	$U_C(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$

AB

4.81 ***1)*** Bestimme die Übertragungsfunktion G(s) des gegebenen Übertragungsglieds.
2) Ermittle die Impulsantwort.
3) Ermittle die Sprungantwort.

C R $u_e(t)$ R $u_a(t)$

Lösung:

1) $U_e(s) = \left(\frac{1}{C \cdot s} + R + R\right) \cdot I(s)$

$U_a(s) = R \cdot I(s)$

$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{R \cdot I(s)}{\left(\frac{1}{C \cdot s} + 2R\right) \cdot I(s)} = \frac{RC \cdot s}{1 + 2RC \cdot s}$

- Die Eingangs- und Ausgangsfunktion werden im Bildbereich angegeben.

2) $u_e(t) = \delta(t)$

- Das Eingangssignal ist die Deltafunktion.

$U_e(s) = 1$

$U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s) = G(s) \cdot 1 = \frac{RC \cdot s}{1 + 2RC \cdot s}$

- Multiplikation mit der Eingangsfunktion.

$(RC \cdot s) : (2RC \cdot s + 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2RC \cdot s + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{2RC}}$

- Um rücktransformieren zu können, wird die Polynomdivision angewendet.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{2RC}} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot \delta(t) - \frac{1}{4RC} \cdot e^{-\frac{1}{2RC} \cdot t}$

Impulsantwort: $u_a(t) = g(t) = \frac{1}{2} \cdot \delta(t) - \frac{1}{4RC} \cdot e^{-\frac{1}{2RC} \cdot t}$

3) $u_e(t) = \sigma(t)$

- Das Eingangssignal ist die Sprungfunktion.

$U_e(s) = \frac{1}{s}$

$U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{RC}{1 + 2RC \cdot s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2RC} + s}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2RC} + s} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2RC} \cdot t}$

Sprungantwort: $u_a(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2RC} \cdot t}$

BC TE **4.82** Für das dargestellte Übertragungsglied lautet die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$.
Die Eingangsfunktion ist $u_e(t) = 10\ V \cdot \sigma(t)$.

1) Berechne die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ für $R = 200\ \Omega$, $C = 100\ \mu F$ und $L = 1\ H$ und stelle sie grafisch dar.
2) Beschreibe, um welchen Schwingfall es sich handelt.

Lösung:

1) $G(s) = \frac{1}{1 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot s^2 + 200 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot s + 1} = \frac{10^4}{s^2 + 200s + 10^4}$

$U_e(s) = \frac{10}{s}$

$U_a(s) = \frac{10^4}{s^2 + 200s + 10^4} \cdot \frac{10}{s} = \frac{10^5}{s \cdot (s + 100)^2}$

$\frac{10^5}{s \cdot (s + 100)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 100} + \frac{C}{(s + 100)^2}$

$\Rightarrow A = 10,\ B = -10,\ C = -1\,000$

$U_a(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s + 100} - \frac{1\,000}{(s + 100)^2}$

$u_a(t) = 10 - 10 \cdot e^{-100t} - 1\,000 \cdot t \cdot e^{-100t}$

2) Es handelt sich um den aperiodischen Grenzfall.

B **4.83** Die Übertragungsfunktion G(s) ist gegeben.
Ermittle **1)** die Impulsantwort, **2)** die Sprungantwort.

a) $G(s) = \frac{1}{1 + 0{,}1s}$ **b)** $G(s) = \frac{0{,}1s}{1 + 0{,}1s}$

AB **4.84** Bestimme die Übertragungsfunktion G(s) des gegebenen Übertragungsglieds.

a) **b)**

ABD TE **4.85** Für das dargestellte Übertragungsglied lautet die Übertragungsfunktion

$G(s) = \frac{LC \cdot s^2}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$.

1) Zeige, dass die Übertragungsfunktion die angegebene Gestalt hat.
2) Berechne die Sprungantwort für $R = 120\ \Omega$, $C = 100\ \mu F$ und $L = 1\ H$.
3) Berechne mit $U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s)$ die Ausgangsspannung $u_a(t)$ für die Eingangsspannung $u_e(t) = 4\ V \cdot \sin(40t) \cdot \sigma(t)$ und $R = 120\ \Omega$, $C = 100\ \mu F$ und $L = 1\ H$.
Stelle $u_a(t)$ grafisch dar.

Zusammenfassung

Spezielle Funktionen
(Einheits-)Sprungfunktion $\sigma(t)$: Sprungstelle bei $t = 0$ von 0 auf 1.
Dirac'sche Deltafunktion: $\delta(t) = \infty$ für $t = 0$ und $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$

Fourier-Transformation
Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich
$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t}\, dt$ ... $F(\omega)$ heißt Fourier-Transformierte von $f(t)$, falls das Integral konvergiert.

$F(\omega)$ ... Spektralfunktion, $|F(\omega)|$ ... spektrale Amplitudendichte, ist kontinuierlich
$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega t}\, d\omega$ ... inverse Fourier-Transformation, $f(t)$ ... Fourier-Integral

Laplace-Transformation
Für die Funktion $f(t)$ gilt: $f(t) = 0$ für $t < 0$
$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt$ ... $F(s)$ heißt Laplace-Transformierte von $f(t)$, falls das Integral konvergiert.

Schreibweisen:	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$ ... Korrespondenzsymbol
Linearität:	$\mathcal{L}\{a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + b \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$	
Ähnlichkeitssatz:	$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$	mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $a > 0$
Verschiebungssatz:	$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$	mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $a > 0$
Dämpfungssatz:	$\mathcal{L}\{f(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = F(s + a)$	mit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $a \in \mathbb{R}$
Differentiationssatz:	$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s \cdot F(s) - f(0)$	
	$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$	
	$f'''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$	

Die **Rücktransformation** erfolgt mithilfe von Korrespondenztabellen. Gebrochen rationale Funktionen müssen gegebenenfalls mittels Partialbruchzerlegung vereinfacht werden.

Mithilfe der Laplace-Transformation können **Differentialgleichungen** mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangswerten gelöst werden. Dazu wird die Differentialgleichung Laplace-transformiert und so in eine lineare Gleichung übergeführt. Nach deren Lösung wird wieder rücktransformiert.

Übertragungsfunktion $G(s)$: Verhältnis der Laplace-Transformierten der Ausgangsfunktion zur Laplace-Transformierten der Eingangsfunktion: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

Weitere Aufgaben

4.86 Stelle die Funktion grafisch dar. B
a) $f(t) = (t - 3)^2 \cdot \sigma(t - 3)$ **b)** $f(t) = t \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - 2))$ **c)** $f(t) = \delta(t + 1)$

4.87 Stelle die stückweise definierte Funktion grafisch dar und gib sie mithilfe der Sprungfunktion an. AB

a) $u(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ **b)** $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ \sin(t - 1) & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$

Integraltransformationen

BC TE **4.88** **1)** Berechne die komplexen Fourier-Koeffizienten der dargestellten Funktion allgemein für eine Periode T. Arbeite mit Technologie.
2) Stelle $T \cdot c_n$ bzw. $T \cdot |c_n|$ für T = 4 und T = 16 grafisch dar. Vergleiche die beiden Graphen.
3) Berechne die Fourier-Transformierte eines Einzelimpulses. Stelle das Amplitudenspektrum grafisch dar.

a)

b)

BC **4.89** Ermittle die Fourier-Transformierte der gegebenen Funktion
1) mittels Integration und **2)** mithilfe der Tabelle von Seite 104.

a) $f(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{für } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ **b)** $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Laplace-Transformation

BC **4.90** Berechne die Laplace-Transformierte der gegebenen Funktion
1) mittels Integration und **2)** mithilfe der Korrespondenztabelle von Seite 113.
a) $f(t) = 3e^{-2t}$ **b)** $f(t) = 2 - 3t$ **c)** $u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$ **d)** $u(t) = U_0 \cdot t$

Aufgaben 4.91 – 4.92: Gib jeweils die Laplace-Transformierte an.

B **4.91** **a)** $f(t) = 2(t+1)^2$ **b)** $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ **c)** $u(t) = 20e^{-2t} \cdot \sin(t)$ **d)** $f(t) = t \cdot \cos(3t)$

B **4.92** **a)** $y' + 2y = t^2 + 2t - 3;\ y(0) = 1$ **b)** $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0{}^2 y = 0;\ y(0) = \dot{y}(0) = 0$

B **4.93** Berechne die Zeitfunktion der gegebenen Bildfunktion.

a) $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s-4}$ **c)** $F(s) = \frac{3+s}{s^2+9}$ **e)** $U(s) = \frac{4}{s \cdot (s+9)}$ **g)** $F(s) = \frac{10}{(s-5)^2+4}$

b) $X(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{3s+1}$ **d)** $F(s) = \frac{2s-7}{s^2+16}$ **f)** $Y(s) = \frac{2s+1}{s \cdot (s+2) \cdot (s+3)}$ **h)** $F(s) = \frac{12}{s \cdot (s^2+6s+4)}$

B **4.94** Löse die Differentialgleichung mithilfe der Laplace-Transformation.
a) $y' - 4y = 2\sin(2t);\ y(0) = 1$ **c)** $y'' + 2y' + y = 3e^{-t};\ y(0) = y'(0) = 0$
b) $y' + 5y = 25t^2 - 1;\ y(0) = 2$ **d)** $\ddot{y} + 10\dot{y} + 9y = 90t;\ y(0) = \dot{y}(0) = 0$

AB **4.95** Für den freien Fall aus einer Höhe h_0 gilt für die Beschleunigung $a = h''(t) = -g$. Ermittle mithilfe der Laplace-Transformation die Funktion der Höhe h(t), wenn $v(0\,s) = 0\,\frac{m}{s}$ gilt.

BC **4.96** Ein gedämpftes Feder-Masse-System wird aus der Ruhelage durch eine Kraft F angeregt. Ermittle den Bewegungsverlauf y(t) für m = 4 kg, $b = 20\,\frac{kg}{s}$, $k = 250\,\frac{N}{m}$ und F = 100 N. Gib die stationäre Lösung an. Hinweis: $m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F$

ABCD TE **4.97** Für das dargestellte Übertragungsglied lautet die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{RC \cdot s}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$.
1) Erkläre, wie mithilfe der Übertragungsfunktion die Ausgangsfunktion ermittelt werden kann.
2) Zeige, dass G(s) die angegebene Gestalt hat.
3) Die Eingangsfunktion lautet $u_e(t) = 2\,V \cdot \sigma(t)$.
Berechne die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ für R = 1 kΩ, C = 200 μF und L = 1 H und stelle sie grafisch dar. Beschreibe, um welchen Schwingfall es sich handelt.

Aufgaben in englischer Sprache

English	Deutsch	English	Deutsch
Fourier Transform	Fourier-Transformation, Fourier-Transformierte	inverse Laplace Transform	inverse Laplace-Transformation
final value theorem	Endwertsatz	Laplace Transform	Laplace-Transformation
frequency shifting	Dämpfungssatz	ramp	Rampenfunktion
initial value theorem	Anfangswertsatz	time scaling	Ähnlichkeitssatz
inverse Fourier Transform	inverse Fourier-Transformation, Fourier-Integral	time shifting	Verschiebungssatz
		unit impulse	Deltaimpuls $\delta(t)$
		unit step	Einheitssprung $\sigma(t)$

4.98 Find the Laplace Transform of $f(t) = e^{-t} \cdot \cos(2t) + 4t^2 e^{2t}$. B

4.99 Compute the inverse Laplace Transform of $F(s) = \frac{4s}{s^2 + 4s + 1}$. AB

4.100 Solve the following initial value problem by Laplace Transform. B
$y' - 5y = 3t + 2, \quad y(0) = 0$

Wissens-Check

		gelöst
1	Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung des Terms $\frac{1}{s^2 \cdot (s^2 + 4)}$ lautet: A) $\frac{A}{s^2} + \frac{Bs + 6}{s^2 + 4}$ B) $\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 2} + \frac{D}{s - 2}$ C) $\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C \cdot s + D}{s^2 + 4}$	
2	Ich kann die Laplace-Transformierte von Funktionen ermitteln. ZB: $\mathcal{L}\{2 \cdot e^{-3t}\}$	
3	Ich kann die Rücktransformation einer Laplace-Transformierten durchführen. ZB: $F(s) = \frac{4}{s^2 + 4}$	
4	Ich kenne den Unterschied zwischen der Fourier-Transformation und der Laplace-Transformation.	
5	Ich kann die Anwendung der Laplace-Transformation bei Differentialgleichungen erklären.	
6	Ist die Übertragungsfunktion G(s) bekannt, so gilt für die Laplace-Transformierte des Ausgangssignals …	

Lösung:
1) C 2) siehe Seiten 106ff; $f(t) = \frac{2}{s + 3}$ 3) siehe Seiten 115ff; $f(t) = 2 \cdot \sin(2t)$
4) siehe Seite 107 5) siehe Seiten 118ff 6) $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$

5 Funktionen in mehreren Variablen

In vielen technischen und physikalischen Anwendungen treten Größen auf, die von mehr als einer Variablen abhängig sind. So ist der Flächeninhalt eines Rechtecks von der Länge und der Breite abhängig, das Volumen eines Zylinders von Radius und Höhe. Die Abhängigkeit von mehreren Variablen erfordert eine Erweiterung des bisherigen Funktionsbegriffs, der zu Funktionen in zwei oder mehreren Variablen führt.

5.1 Grundlagen und Darstellungsformen

ABCD **5.1** Ein renommiertes Automagazin führte bei einem neuen Hybrid-Modell der Marke Rollgo verschiedene Testreihen durch. Bei einer davon wurde der Treibstoffverbrauch T in $\frac{\text{L}}{100\text{ km}}$ in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zwischen 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gemessen. Dabei stellte sich heraus, dass der Verbrauch näherungsweise durch $T(v) = 0{,}00004 \cdot v^2 + 0{,}01521 \cdot v + 1{,}8381$ beschrieben werden kann.

1) Stelle die Funktion T grafisch dar und ermittle den Treibstoffverbrauch bei den Geschwindigkeiten 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{L}}{100\text{ km}}$.

2) Es wurde eine weitere Testreihe durchgeführt, in der zusätzlich die Beladung berücksichtigt wurde. Man fand heraus, dass der Verbrauch pro 100 kg Beladung im Mittel um 0,2 $\frac{\text{L}}{100\text{ km}}$ steigt. Stelle eine Formel auf, mit der derTreibstoffverbrauch T abhängig von der Geschwindigkeit v und der Beladung m berechnet werden kann.

3) Erstelle eine Tabelle, in der man den Treibstoffverbrauch bei 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ für eine jeweilige Beladung von 100 kg, 200 kg und 500 kg ablesen kann.

4) Argumentiere, ob es möglich ist, die Formel aus **2)** grafisch darzustellen.

Unter einer reellen **Funktion f in zwei unabhängigen Variablen** versteht man eine Zuordnungsvorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) genau eine reelle Zahl z zuordnet. **x** und **y** werden als **unabhängige Variablen** und **z** als **abhängige Variable** bezeichnet. Die **Funktionsgleichung** wird meist in der Schreibweise **z = f(x, y)** angegeben.

Übliche Bezeichnungen und Schreibweisen:
z, f … Funktion
x, y … unabhängige Variablen, Argumente
z, f(x, y) … abhängige Variable, Funktionswert

Angabe einer Funktionsgleichung:
z = f(x, y) oder z = z(x, y)

Neben der Möglichkeit, eine Funktion mithilfe einer Wertetabelle darzustellen, gibt es auch für Funktionen in mehreren Variablen verschiedene Darstellungsarten.

Analytische Darstellung – Funktionsgleichung

- **Explizite Darstellung**: z = f(x, y)
  ZB: $z = 3x - 4y + 5$
  Die Funktionsgleichung ist nach einer der drei Variablen, in diesem Fall nach z, aufgelöst.

- **Implizite Darstellung**: F(x, y, z) = 0
  ZB: $z - 3x + 4y - 5 = 0$
  Der Funktionsterm wird nicht nach einer Variablen aufgelöst, sondern in Form einer homogenen Gleichung angegeben.

Im Gegensatz zur impliziten Darstellung ist die explizite Darstellung nicht immer möglich, da zum Beispiel $z^3 - 2z + x + y = 0$ nicht nach z umgeformt werden kann.

Grafische Darstellung

Ein Punkt P im Raum lässt sich in einem dreidimensionalen Koordinatensystem durch drei Zahlen, die kartesichen Koordinaten x_0, y_0 und z_0, eindeutig bestimmen, $P(x_0|y_0|z_0)$. Die Koordinate z_0 wird dabei im Allgemeinen als „Höhenkoordinate" bezeichnet.

Bei einer Funktion in zwei Variablen wird durch die Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ **jedem Zahlenpaar** (x_0, y_0) aus dem Definitionsbereich D_f der Funktion **genau ein Funktionswert** $z_0 = f(x_0, y_0)$ **zugeordnet**. Der Funktionswert wird im Normalabstand von der xy-Ebene entweder nach oben – wenn $z_0 > 0$ ist – oder nach unten – wenn $z_0 < 0$ ist – eingezeichnet. Die Menge aller auf diese Art ermittelten Punkte bildet über dem Definitionsbereich D_f eine Fläche, die den Verlauf der Funktion veranschaulicht.

Eine **Funktion in zwei unabhängigen Variablen** $z = f(x, y)$ beschreibt eine **Fläche** in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

Der einfachste Flächentyp ist eine **Ebene** mit der Funktionsgleichung ε: $ax + by + cz + d = 0$ (vgl. Band 2, Abschnitt 8.7.2). Um eine Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem zu veranschaulichen, ermittelt man die Schnittpunkte der Ebene mit den drei Koordinatenachsen und erhält die so genannten **Spurpunkte** $A(x|0|0)$, $B(0|y|0)$ und $C(0|0|z)$. Diese Punkte bilden ein **Spurdreieck**, das die Lage der Ebene im Raum eindeutig bestimmt.

5.2 Veranschauliche die Ebene ε: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ mithilfe eines Spurdreicks. Beschreibe deine Vorgehensweise. **BC**

Lösung:
Ich berechne die Schnittpunkte mit den drei Achsen. Für alle Punkte auf der x-Achse gilt, dass $y = z = 0$ ist. Für die Punkte auf der y- und der z-Achse gehe ich genauso vor.

x-Achse: $2x + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 12 \Rightarrow x = 6$ $A(6|0|0)$
y-Achse: $2 \cdot 0 + 3y + 4 \cdot 0 = 12 \Rightarrow y = 4$ $B(0|4|0)$
z-Achse: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4z = 12 \Rightarrow z = 3$ $C(0|0|3)$

Ich zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie zu einem Spurdreick.

Um eine **beliebige Fläche** darzustellen, kann man beispielsweise diese Fläche mit der xy-, der yz- und der xz-Ebene schneiden. Dadurch erhält man Schnittkurven, die in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden können.

5.3 Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ beschreibt eine Fläche im Raum. Stelle diese Fläche grafisch dar und beschreibe ihre Form. **BD**

Lösung:
Schnitt mit der xy-Ebene: $z = 0$
$x^2 + y^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow k_1: x^2 + y^2 = 16$
Schnitt mit der xz-Ebene: $y = 0$
$k_2: x^2 + z^2 = 16$
Schnitt mit der yz-Ebene: $x = 0$
$k_3: y^2 + z^2 = 16$

- Die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen sind Kreise k_1, k_2 und k_3 mit dem Radius $r = 4$.

Die Gleichung beschreibt eine Kugel mit dem Radius $r = 4$.

Funktionen in mehreren Variablen

TE

Mathcad: www.hpt.at

Technologieeinsatz: Darstellung von Funktionen in zwei Variablen

GeoGebra

Um Funktionen in zwei Variablen grafisch darzustellen, muss im Menü **Ansicht** die Grafikoberfläche **3D Grafik** gewählt werden. Nun gibt man in die Eingabezeile die Funktionsgleichung, zum Beispiel **f(x,y)=x^2/9-y^2/4**, ein.

Das Programm stellt die Funktion grafisch dar.

TI-Nspire

In der Applikation **Graphs** wählt man im Menü **2: Ansicht**, **3: 3D-Darstellungen**. Es erscheint ein Eingabefenster, in dem man die Funktionsgleichung eingibt, zB: **0.5*cos(x*y)**

Nun wird die Fläche gezeichnet. Über das Menü **4: Intervall/Zoom**, **1: Wertebereichseinstellungen** kann man die gewünschten Einstellungen für die Darstellung der Fläche wählen.

C **5.4** Gib an, welche der Größen in den angeführten Funktionen abhängige Größen und welche Konstante sind.

a) $f(a, b) = a \cdot b^2 + c$

b) $s(v, t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v \cdot t + s_0$

c) $K_n(K_0, p) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

d) $V(r, h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$

ABC **5.5** **1)** Gib die Formel für den Flächeninhalt A einer Raute mit den Diagonalen e und f an.

2) Beschreibe, wie sich der Flächeninhalt A verändert, wenn die Diagonale e verlängert und gleichzeitig die Diagonale f im selben Verhältnis verkürzt wird.

3) Erstelle eine Wertetabelle, die den Flächeninhalt A angibt, wenn e und f im Intervall [5 cm; 8 cm] mit einer Schrittweite von 1 cm variieren.

B TE **5.6** Messing ist eine Legierung aus Kupfer und Zinn. Je nach Mischungsverhältnis kann Messing Dichten zwischen 8,10 $\frac{g}{cm^3}$ und 8,70 $\frac{g}{cm^3}$ annehmen.

Die Masse einer Kugel aus Messing ist abhängig von ihrem Radius und der Dichte:

$m(r, \rho) = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \rho$ m ... Masse in g, r ... Radius in cm, ρ ... Dichte in $\frac{g}{cm^3}$

1) Erstelle eine Wertetabelle, die die Masse einer Messingkugel angibt, wenn der Kugelradius r im Intervall [1 cm; 10 cm] mit einer Schrittweite von $\Delta r = 1$ cm und die Dichte ρ der Legierung wie oben beschrieben mit einer Schrittweite von $\Delta\rho = 0{,}1\,\frac{g}{cm^3}$ variieren. Verwende dazu ein Tabellenkalkulationsprogramm.

2) Stelle die Funktion $m(r, \rho)$ für die in **1)** angegebenen Bereiche grafisch dar.

5.7 Erik M. P. Widmark (schwedischer Chemiker, 1889 – 1945) entwickelte die nach ihm benannte Widmark-Formel zur Berechnung der Blutalkoholkonzentration c:

BC TE

$c = \frac{A}{m \cdot r}$

c ... Konzentration in ‰, A ... aufgenommene Masse an Ethanol in g,
m ... Körpermasse in kg, r ... Verteilungsfaktor (für Männer: r = 0,7; für Frauen: r = 0,6)

1) Gib jeweils eine Wertetabelle für die Blutalkoholkonzentration c in Abhängigkeit von der Körpermasse m zwischen 50 kg und 100 kg und der Ethanolmasse A zwischen 20 g und 120 g für Männer und Frauen an. Verwende eine Schrittweite von 10 kg bzw. 20 g.

2) Interpretiere die Funktionswerte hinsichtlich der 0,5-‰- und der 0,8-‰-Grenze.

5.8 Die angegebene Gleichung beschreibt eine Fläche im Raum. Stelle diese Fläche grafisch dar und beschreibe ihre Lage.

BC

a) x = 4 **b)** y = 2 **c)** z = 3 **d)** x = z

5.9 Stelle die Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem grafisch dar.

B

a) ε: 5x + 3y + z = 15 **b)** ε: 7x – 2y – 4z = 14 **c)** ε: 2x – 4y + 8z = 16

5.10 Die Funktionsgleichung $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ beschreibt eine Fläche im Raum. Stelle diese Fläche grafisch dar und beschreibe ihre Form.

BC TE

5.11 Die Gleichung $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 25$ beschreibt eine Fläche im Raum. Stelle diese Fläche grafisch dar und beschreibe ihre Form.

BC TE

5.12 Es gibt eine Kunstrichtung, die sich mit der künstlerischen Umsetzung von naturwissenschaftlichen Formeln beschäftigt. Stelle die angegebenen Formeln grafisch dar.

ABD TE

a) Satz von Pythagoras
b) Kinetische Energie
c) Frequenz eines Federpendels
d) Ohm'sches Gesetz

5.13 Stelle die angegebenen Funktionen grafisch dar. Ordne die Funktionsgleichungen den angeführten Graphen zu.

BC TE

1) $z = \sin(x) \cdot \cos(y)$
2) $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$
3) $z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{36}$
4) $z = \sqrt{25 - x^2 + y^2}$

A) z, x, y

B) z, x, y

C) z, x, y

D) z, x, y

5.2 Partielle Ableitungen erster Ordnung

BC **5.14** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$.

1) Bilde die erste Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$.

2) Erkläre, wie die erste Ableitung geometrisch interpretiert werden kann.

Ermittlung von partiellen Ableitungen

In Aufgabe 5.1 wurde die Abhängigkeit des Treibstoffverbrauchs T $\left(\text{in } \frac{\text{L}}{100\text{ km}}\right)$ eines Fahrzeugs von der Fahrgeschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ und der Beladung mit der Masse m (in 100 kg) untersucht. Dabei ergab sich eine Funktion in zwei Variablen:

$T(v, m) = 0{,}00004 \cdot v^2 + 0{,}01521 \cdot v + 0{,}2 \cdot m + 1{,}8381$

Um die Änderungsrate des Treibstoffverbrauchs T mit der Geschwindigkeit v zu ermitteln, wird die Masse m als konstant angesehen. Man bildet die Ableitung nach der Variablen v:

$\frac{dT}{dv} = 0{,}00008 \cdot v + 0{,}01521$

Die Änderung des Treibstoffverbrauchs T mit der Masse m erhält man, indem man die Geschwindigkeit v konstant hält und die Ableitung nach der Variablen m bildet:

$\frac{dT}{dm} = 0{,}2$

Leitet man eine Funktion in zwei Variablen nach einer der Variablen ab, so wird dies partielles Ableiten genannt. Für die **partielle Ableitung** wird üblicherweise das Symbol ∂, genannt **Kronecker-Delta** (nach Leopold Kronecker, deutscher Mathematiker, 1823 – 1891), als Abkürzung verwendet.

Partielle Ableitungen der Funktion $z = f(x, y)$

nach x: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right)$

nach y: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0}\left(\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right)$

Für die Ermittlung der partiellen Ableitungen sind alle bisher bekannten Ableitungsregeln gültig. Die Berechnungen lassen sich auch auf Funktionen in drei und mehr Variablen anwenden, die Definitionen hierzu sind analog zu denen von f_x und f_y.

ZB: Es sollen die partiellen Ableitungen f_x und f_y der Funktion $z = f(x, y) = 4x + 2y - 3x^2y$ ermittelt werden.

- Partielle Ableitung nach x:
  $z = 4\mathbf{x} + 2y - 3\mathbf{x}^2y$
  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4 + 0 - 6xy$ ● y ist konstant
  $f_x = 4 - 6xy$

- Partielle Ableitung nach y:
  $z = 4x + 2\mathbf{y} - 3x^2\mathbf{y}$
  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2 - 3x^2$ ● x ist konstant
  $f_y = 2 - 3x^2$

B **5.15** Bilde die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z von $f(x, y, z) = x^3z - 5x^2y + 3yz - 2z^3 + z$.

Lösung:

$f_x = 3x^2z - 10xy$ ● y und z werden als konstant angesehen.

$f_y = -5x^2 + 3z$ ● x und z werden als konstant angesehen.

$f_z = x^3 + 3y - 6z^2 + 1$ ● x und y werden als konstant angesehen.

Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitung einer Funktion in zwei Variablen

Bei einer Funktion f in einer Variablen x ist der Differentialquotient $\frac{df}{dx}$ die erste Ableitung der Funktion $y = f(x)$. Damit kann die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen in jedem Punkt P angegeben werden. Diese Überlegungen lassen sich auch auf Funktionen in zwei unabhängigen Variablen übertragen.

Schneidet man die Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $\boldsymbol{\varepsilon_1}$: $y = y_0$, die parallel zur xz-Ebene verläuft, im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$, so entsteht eine Schnittkurve $\mathbf{k_1}$, die als **Flächenkurve** bezeichnet wird. Alle auf dieser Schnittkurve liegenden Punkte haben dieselbe y-Koordinate, nämlich $y = y_0$.
Die Koordinate z hängt also nur von x ab. Somit gilt für die Flächenkurve $\mathbf{k_1}$: $z = f(x, y_0)$. Zur Berechnung von f_x hält man daher die Variable y in der Ausgangsgleichung konstant und leitet nach x ab. f_x gibt die Steigung der Tangente $\mathbf{t_1}$ an die Flächenkurve $\mathbf{k_1}$ an.
Durch den Schnitt der Fläche mit der zur yz-Ebene parallelen Ebene $\boldsymbol{\varepsilon_2}$: $x = x_0$ erhält man die Kurve $\mathbf{k_2}$: $z = f(x_0, y)$, deren Funktionsgleichung nur von y abhängt. f_y wird analog zu f_x ermittelt. f_y gibt die Steigung der Tangente $\mathbf{t_2}$ an die Flächenkurven $\mathbf{k_2}$ in P an. Durch $\mathbf{t_1}$ und $\mathbf{t_2}$ wird jene Ebene aufgespannt, in der alle Tangenten liegen, die im Punkt P an die Fläche z gelegt werden können. Diese Ebene bezeichnet man als **Tangentialebene** τ.

Die Herleitung der Gleichung der Tangentialebene erfolgt analog zur Herleitung der Funktionsgleichung einer Tangente in einem Punkt einer Funktion in einer Variablen $y = f(x)$.

Gleichung der Tangentialebene τ an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$:

$$\tau: z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

ZB: An ein Drehparaboloid mit der Gleichung $z = f(x, y) = 0{,}1 \cdot (x^2 + y^2)$ soll im Punkt $P(3|4|2{,}5)$ die Tangentialebene gelegt werden.

Man wählt die zur xz-Ebene parallele Ebene ε_1: $y = 4$ und schneidet diese mit dem Drehparaboloid. Dadurch erhält man Schnittkurve $\mathbf{k_1}$: $z = 0{,}1x^2 + 1{,}6$. Die Flächenkurve $\mathbf{k_1}$ ist eine Parabel. Der Anstieg der Tangente $\mathbf{t_1}$ im Punkt P an die Kurve $\mathbf{k_1}$ lässt sich durch die partielle Ableitung f_x bestimmen.

$z = 0{,}1x^2 + 0{,}1y^2$
$f_x = 0{,}2x$ — ● Ableitung nach x; dabei ist y konstant.
$f_x(3, 4) = 0{,}6$ — ● Im Punkt $P(3|4|2{,}5)$ hat die Tangente an $\mathbf{k_1}$ die Steigung $f_x = 0{,}6$.

Wählt man nun die zur yz-Ebene parallele Ebene ε_2: $x = 3$, erhält man die Schnittkurve $\mathbf{k_2}$: $z = 0{,}1y^2 + 0{,}9$. Die Steigung der Tangente $\mathbf{t_2}$ durch den Punkt P an die Flächenkurve $\mathbf{k_2}$ lässt sich analog durch die partielle Ableitung f_y ermitteln:

$f_y = 0{,}2y$ — ● Ableitung nach y; dabei ist x konstant.
$f_y(3, 4) = 0{,}8$ — ● Im Punkt $P(3|4|2{,}5)$ hat die Tangente an $\mathbf{k_2}$ die Steigung $f_y = 0{,}8$.

Gleichung der Tangentialebene:
$\tau: z = f(3, 4) + f_x(3, 4) \cdot (x - 3) + f_y(3, 4) \cdot (y - 4) = 2{,}5 + 0{,}6 \cdot (x - 3) + 0{,}8 \cdot (y - 4)$
$\tau: z = 0{,}6x + 0{,}8y - 2{,}5$

BC **5.16** Bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $f(x, y) = \sqrt{21 - x^2 - y^2}$ im Punkt $P(1|2|z_0)$. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:
Um die fehlende Koordinate von P zu ermitteln, setze ich die gegebenen Koordinaten in die Funktionsgleichung ein:
$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, 2) = \sqrt{21 - 1 - 4} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow P(1|2|4)$

Ich ermittle die partiellen Ableitungen f_x und f_y und berechne den Wert an der Stelle $(x, y) = (1, 2)$, um die Steigungen der Tangenten im Punkt P zu bestimmen.

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{21 - x^2 - y^2}}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{21 - x^2 - y^2}}$

$f_x(1, 2) = -\frac{1}{\sqrt{21 - 1^2 - 2^2}} = -0{,}25$ $\qquad$ $f_y(1, 2) = -\frac{2}{\sqrt{21 - 1^2 - 2^2}} = -0{,}5$

Nun werden die berechneten Größen in die allgemeine Gleichung der Tangentialebene eingesetzt:
$\tau\colon\ z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$
$z = f(1, 2) + f_x(1, 2) \cdot (x - 1) + f_y(1, 2) \cdot (y - 2) = 4 - 0{,}25 \cdot (x - 1) - 0{,}5 \cdot (y - 2)$

$\tau\colon\ z = -0{,}25x - 0{,}5y + 5{,}25$

ABD **5.17** Gib die Gleichung der Tangentialebenen an die Fläche $z = f(x, y)$ in den angegebenen Punkten an und beschreibe ihre Lage.
1) Drehparaboloid: $z = x^2 + y^2 - 5$; Schnittpunkt mit der z-Achse
2) Halbkugel: $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$; Schnittpunkte mit der x- und der y-Achse

BC **5.18** Ernst ermittelt die partielle Ableitung f_x der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 6xy^2 + 2y^3$:
$f_x = 6x - 12xy + 6y^2$
Erkläre, welchen Fehler Ernst gemacht hat, und stelle die Ableitung richtig.

Aufgaben 5.19 – 5.22: Ermittle jeweils f_x und f_y der Funktion $z = f(x, y)$.

B **5.19** **a)** $z = 4x - 3y + 6$ **b)** $z = -2x^2 + 4y^3 + 6xy$ **c)** $z = 5xy + 3y^4 - 6x^2y^2$

B **5.20** **a)** $z = -5x^3y^2 + 7xy - 3x^2y$ **b)** $z = \frac{4}{x^3} - 3x^2y^4 + \frac{5}{y}$ **c)** $z = 4x + \frac{y^2}{x} - \frac{6}{y} + 4$

B **5.21** **a)** $z = \cos(x + y^3)$ **b)** $z = \sin(3xy - 4x^2y)$ **c)** $z = \tan(5x^2y^3 - 2xy^2)$

B **5.22** **a)** $z = 3e^{-2x} \cdot \sin(3x + y)$ **b)** $z = \frac{e^{3xy}}{2x + 3y}$ **c)** $z = \sqrt{3x^2y + 2xy^2}$

AB **5.23** Bestimme die gesuchten partiellen Ableitungen.

a) $E(m, v) = mgh + \frac{mv^2}{2}$ $\quad \frac{\partial E}{\partial m} = ?;\ \frac{\partial E}{\partial v} = ?$

b) $W(v, \alpha) = \frac{v^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$ $\quad \frac{\partial W}{\partial v} = ?;\ \frac{\partial W}{\partial \alpha} = ?$

c) $p(V, T) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$ $\quad \frac{\partial p}{\partial V} = ?;\ \frac{\partial p}{\partial T} = ?$

Aufgaben 5.24 – 5.25: Ermittle jeweils die Gleichungen der Tangentialebenen in P.

AB **5.24** **a)** $z = 4x^2 + 3y^2$; $P(1|3|z_0)$ **b)** $z = 6x^2 - 8y^2$; $P(-2|5|z_0)$

AB **5.25** **a)** $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$; $P(2|4|z_0)$ **b)** $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$; $P(-1|2|z_0)$

B **5.26** Ermittle f_x, f_y und f_z der angegebenen Funktion.

a) $f(x, y, z) = 4x^2yz^3 + 6y^3z - xz^4$ **b)** $f(x, y, z) = \sin(4xy) + \cos(6yz)$

5.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Partielle Ableitungen höherer Ordnung werden zum Beispiel zur Beschreibung von Schwingungen benötigt. Der französische Mathematiker Jean Baptiste le Rond d'Alembert gewann wichtige Erkenntnisse anhand der Untersuchung von schwingenden Saiten.

5.27 Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 3x^3y^2 - 2xy^3 + 4xy - 5y$.

BC

1) Bilde die partiellen Ableitungen f_x und f_y.
2) Leite f_x und f_y noch einmal nach der Variablen x bzw. y ab.
3) Leite nun f_x nach y und f_y nach x ab.
4) Vergleiche die beiden Ergebnisse aus ***3)***. Was fällt dir auf?

Eine Funktion in mehreren voneinander unabhängigen Variablen kann mehrmals nacheinander partiell differenziert werden. Man erhält **partielle Ableitungen höherer Ordnung**. Nach zweimaligem Ableiten erhält man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, nach dreimaligem die partiellen Ableitungen dritter Ordnung, usw. Dabei ist die **Reihenfolge** der einzelnen Differentiationsschritte zu beachten. So bedeutet zum Beispiel f_{xxy}, dass die Funktion zuerst nach x, dann noch einmal nach x und anschließend nach y abgeleitet wird.

Für die **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** schreibt man:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Die Berechnungen erfolgen in der Reihenfolge, in der die Indizes angegeben sind. Die Ableitungen $\mathbf{f_{xy}}$ und $\mathbf{f_{yx}}$ nennt man **gemischt partielle Ableitungen**.

ZB: Die gemischt partiellen Ableitungen der Funktion $z = f(x, y) = x^4y - 2xy^3$ werden gebildet:

$f_x = 4x^3y - 2y^3$ ● Ableitung der Funktion nach x
$f_{xy} = 4x^3 - 6y^2$ ● Die Ableitung von f_x nach y ergibt die gemischt partielle Ableitung f_{xy}.
$f_y = x^4 - 6xy^2$ ● Ableitung der Funktion nach y
$f_{yx} = 4x^3 - 6y^2$ ● Die Ableitung von f_y nach x ergibt die gemischt partielle Ableitung f_{yx}.

Vergleicht man die gemischt partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx}, so erkennt man, dass diese gleich sind. Das bedeutet, dass die gemischt partiellen Ableitungen in diesem Beispiel unabhängig von der Reihenfolge sind, in der sie gebildet werden.

Hermann Amandus Schwarz (deutscher Mathematiker, 1843 – 1921) zeigte, dass diese Eigenschaft für alle stetig differenzierbaren Funktionen, also für stetige Funktionen, deren Ableitungen auch stetig sind, gilt. Dieser Zusammenhang wird **Satz von Schwarz** genannt.

Satz von Schwarz
Für stetig differenzierbare Funktionen gilt: Bei gemischt partiellen Ableitungen hängt das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Variablen ab, nach denen differenziert wurde.

ZB: Für eine Funktion in drei Variablen f(x, y, z) gilt:

- $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$
- $f_{xyz} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx} = \ldots$

TE

Technologieeinsatz: Gemischt partielle Ableitungen
TI-Nspire

GeoGebra, Mathcad: www.hpt.at

ZB: Es soll die gemischt partielle Ableitung f_{xy} der Funktion $z = f(x, y) = 2xy^2 \cdot e^{x-y}$ an der Stelle $(x, y) = (1, 1)$ ermittelt werden.

Eine Funktion in zwei Variablen wird am TI-Nspire genauso definiert wie eine Funktion in einer Variablen: **f(x,y):=2*x*y^2*e^(x-y)**

Man verwendet im Menü **4: Analysis**, **1: Ableitung**, um die Funktion $f_x(x,y)$ zu ermitteln: **fx(x,y):=**$\frac{d}{dx}$**(f(x,y))**

Bei der gemischt partiellen Ableitung f_{xy} geht man analog vor: **fxy(x,y):=**$\frac{d}{dy}$**(fx(x,y))**

1.1 *Nicht gespeicherte

$f(x,y):=2\cdot x\cdot y^2\cdot e^{x-y}$	Fertig
$fx(x,y):=\frac{d}{dx}(f(x,y))$	Fertig
$fxy(x,y):=\frac{d}{dy}(fx(x,y))$	Fertig
$fxy(1,1)$	4.

Für den gesuchten Funktionswert gibt man **fxy(1,1)** ein und erhält $z = 4$.

Aufgaben 5.28 – 5.30: Ermittle jeweils $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ der gegebenen Funktion $z = f(x, y)$.

B **5.28** **a)** $z = x^3 + 2y^2 - 5$ **b)** $z = 4x^2y^3 + 5x^4y^2 + 3x$ **c)** $z = -x^2 + 7xy^3 + 5x$

B **5.29** **a)** $z = \sin(x^2y)$ **b)** $z = \cos(4xy^2)$ **c)** $z = \tan(5x^3y)$

B **5.30** **a)** $f(x, y) = e^{3xy} \cdot \cos(2xy^2)$ **b)** $f(x, y) = 7e^{-2y} \cdot \sin(4x^2 + y^2)$ **c)** $f(x, y) = 4x^2 \cdot \cos(x + y)$

BCD **5.31** Bei einer Stundenwiederholung soll die partielle Ableitung 2. Ordnung f_{yy} der Funktion $f(x, y) = 3x^4y^2 - 4xy^2 + x^2y^3$ ermittelt werden. Anna und Sebastian verwenden zur Lösung der Aufgabe unterschiedliche Technologie (siehe Abbildungen):

TE

A) Anna:

Mathcad - [Unbenannt:1]
Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format

$f(x,y) := 3\cdot x^4\cdot y^2 - 4\cdot x\cdot y^2 + x^2\cdot y^3$

$\frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \rightarrow 6\cdot x^4 + 6\cdot y\cdot x^2 - 8\cdot x$

B) Sebastian:

1.1 *Nicht gespeicherte

$f(x,y):=3\cdot x^4\cdot y^2-4\cdot x\cdot y^2+x^2\cdot y^3$	Fertig
$\frac{d^2}{dy^2}(f(x,y))$	$6\cdot y\cdot x^2+6\cdot x^4$

Rechne die Aufgabe nach und gib an, ob Anna oder Sebastian das richtige Ergebnis ermittelt hat. Erkläre, welcher Fehler gemacht wurde.

BD **5.32** **1)** Ermittle jeweils den Wert der partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} der Funktion $z = f(x, y)$ im angegebenen Punkt.
2) Zeige, dass gilt: $f_{xy} = f_{yx}$

a) $z = xy^4 + 3x^2 - 5x$, $P(-2|3|z_P)$
b) $z = 2 \cdot \sin(4x) + 5 \cdot \cos(6y)$, $Q(\frac{\pi}{3}|\frac{\pi}{4}|z_Q)$
c) $z = \frac{x^2 + y}{y - x}$, $R(1|4|z_R)$
d) $z = y \cdot e^{\sin(x)}$, $S(\pi|-3|z_S)$

BC **5.33** Bestimme die Ableitungen f_{xyz}, f_{zxy} und f_{yzx}. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

a) $f(x, y, z) = x^2yz + 4xyz^3 - x^3y^2z$ **b)** $f(x, y, z) = 5x^2y^3z^2 - 2x^4y^2 + 5y^2z^3$

5.4 Extremwerte

5.34 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt einer Wanderkarte. Beantworte folgende Fragen:

1) Welche Bedeutung haben die braun eingezeichneten Linien?

2) Mit welcher Steigungsänderung muss ein Wanderer rechnen, wenn er entlang einer braunen Linie wandert?

3) Ein Wanderer befindet sich vor dem Gasthof Bergspitze auf 2 680 Höhenmetern. Er wandert zur Pension „Zur Aussicht". Muss er mit einem Anstieg, einem Gefälle oder beidem rechnen?

C

5.35 **1)** Erkläre, unter welchen Bedinungen bei einer Funktion $y = f(x)$ in einer Variablen ein Sattelpunkt vorliegt.

2) Ein beliebtes Knabbergebäck kann als Darstellung einer Funktion $z = f(x, y)$ interpretiert werden (siehe Abbildung). Gib an, wo du auf dieser Fläche einen Sattelpunkt vermutest und begründe deine Entscheidung.

CD

Funktionen in einer Variablen lassen sich als Kurven in der xy-Ebene darstellen. Die Methoden der Differentialrechnung ermöglichen die Beschreibung des Verlaufs dieser Kurven. Ähnlich kann mit Funktionen $z = f(x, y)$ in mehreren Veränderlichen, die sich als Fläche im dreidimensionalen Raum darstellen lassen, verfahren werden.

Bei vielen Wanderkarten werden Flächen in Form von Höhen- bzw. **Niveaulinien** dargestellt.

Alle Punkte auf gleicher Höhe werden zu einer Flächenkurve zusammengefasst. Diese Kurve lässt sich als Schnitt mit einer zur xy-Ebene parallelen Ebene auffassen. Dabei gibt die Funktion $z = f(x, y)$ jeweils die Meereshöhe eines Punkts im Gelände an. Auf diese Art lassen sich Gefälle und Steigungen sowie Hochpunkte und Tiefpunkte übersichtlich ablesen.

Entfernt man sich auf der Fläche $z = f(x, y)$ von einem Punkt P und nimmt die Höhenkoordinate z ausgehend von P in jede Richtung ab, bezeichnet man P als **Hochpunkt** bzw. als **lokales Maximum** der Funktion. Wird die Höhenkoordinate z hingegen immer größer, dann ist P der tiefste Punkt in diesem Bereich. In diesem Fall spricht man von einem **Tiefpunkt** bzw. einem **lokalen Minimum**. Die beiden **lokalen Extrempunkte**, Hoch- und Tiefpunkt, nehmen ihre besondere Lage nur in Bezug auf ihre unmittelbare Umgebung ein. Man spricht mathematisch von einer **hinreichend kleinen Umgebung**.

Alle Tangenten im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$ spannen eine Tangentialebene τ auf. Ist P ein Extrempunkt, so haben alle Tangenten den Anstieg null. Daher verläuft in einem lokalen Extrempunkt die Tangentialebene immer parallel zur xy-Koordinatenebene. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$ sind somit gleich null.

Anhand dieser Überlegungen gelangt man zu folgender Definition.

Eine Funktion $z = f(x, y)$ hat an der Stelle (x_0, y_0) ein **lokales Maximum**, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_0, y_0) für alle Stellen (x, y) gilt: $f(x_0, y_0) > f(x, y)$
Sie hat ein **lokales Minimum**, wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_0, y_0) für alle Stellen (x, y) gilt: $f(x_0, y_0) < f(x, y)$

Da ein Hoch- bzw. ein Tiefpunkt nur dann auftreten kann, wenn die **partiellen Ableitungen erster Ordnung null** sind, wird dies als notwendige Bedingung für einen **lokalen Extremwert** bezeichnet.

Notwendige Bedingungen für einen lokalen Extremwert

Wenn eine Funktion $z = f(x, y)$ bei (x_0, y_0) einen relativen Extremwert aufweist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ an der Stelle (x_0, y_0) existieren, so gilt:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Es ist möglich, dass in einem Punkt P die partiellen Ableitungen f_x und f_y gleich null sind, aber der Punkt P trotzdem kein lokaler Extrempunkt ist. In diesem Fall spricht man von einem **Sattelpunkt**. Im Sattelpunkt gibt es mindestens eine Schnittkurve **g**, die ein Maximum hat, und eine Schnittkurve **h**, die ein Minimum hat.

Fläche mit Sattelpunkt P

Niveaulinienbild der Fläche

Obwohl es für die Existenz eines Extremwerts notwendig ist, dass die partiellen Ableitungen f_x und f_y gleich null sind, ist dieses Kriterium aber keineswegs ausreichend. Man benötigt eine weitere, **hinreichende Bedingung**, um die Existenz eines Minimums bzw. Maximums prüfen zu können.

Hinreichende Bedingung für einen Extremwert

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$ bzw. in der Kurzfassung: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

Gilt $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, so liegt ein **lokales Maximum** vor.

Ist $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, so handelt es sich um ein **lokales Minimum**.

Bemerkungen:

- Ist $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, so liegt weder ein Hoch- noch ein Tiefpunkt vor, sondern ein Sattelpunkt.
- Ist $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$, müssen andere Berechnungen und Methoden durchgeführt werden, um über die Existenz eines Extremwerts zu entscheiden.

5.36 Untersuche die Funktion $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6$ auf Hoch- bzw. Tiefpunkte und gib gegebenenfalls deren Koordinaten an.

B

Lösung:

$f_x = 2x + 2 \quad f_y = 2y - 4$ — ● Bilden der partiellen Ableitungen

$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{xy} = 0$

I: $2x + 2 = 0$ — ● Angeben der notwendigen Bedingungen

II: $2y - 4 = 0$

$x = -1, y = 2$ — ● Lösen des Gleichungssystems

$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ — ● Überprüfen der hinreichenden Bedingung und Bestimmen der Art des Extrempunkts

$2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$

$f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

$z = (-1)^2 + 2^2 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 6 = 1$ — ● Berechnen des Funktionswerts

Bei $T(-1|2|1)$ befindet sich ein Tiefpunkt.

5.37 Ein quaderförmiger Körper aus Kunststoff soll so gegossen werden, dass sein Volumen bei kleinstmöglicher Oberfläche $V = 1\,000\ \text{cm}^3$ betragen soll. Ermittle die Abmessungen dieses Quaders und interpretiere das Ergebnis.

ABC

Lösung:

ZF: $O = 2xy + 2yz + 2xz$ — ● Aufstellen der Zielfunktion

NB: $V = 1\,000 = x \cdot y \cdot z$ — ● Aufstellen der Nebenbedingung, eine Variable ausdrücken

$z = \frac{1\,000}{x \cdot y}$

$O(x, y) = 2xy + 2y \cdot \frac{1\,000}{x \cdot y} + 2x \cdot \frac{1\,000}{x \cdot y} =$ — ● Einsetzen in die Zielfunktion

$= 2xy + \frac{2\,000}{x} + \frac{2\,000}{y}$

$O_x = 2y - \frac{2\,000}{x^2} \quad O_y = 2x - \frac{2\,000}{y^2}$ — ● Berechnen von O_x und O_y

$O_{xx} = \frac{4\,000}{x^3}, O_{yy} = \frac{4\,000}{y^3}, O_{xy} = 2$

I: $2y - \frac{2\,000}{x^2} = 0$ — ● Angeben der notwendigen Bedingungen

II: $2x - \frac{2\,000}{y^2} = 0$

$x = 10, y = 10$ — ● Lösen des Gleichungssystems

$O_{xx}(10, 10) = 4, O_{yy}(10, 10) = 4,$ — ● Überprüfen des Extremwerts

$4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ und $O_{xy} = 2 > 0$ — ● Die Oberfläche ist ein Minimum.

$x = 10$ cm, $y = 10$ cm, $z = 10$ cm — ● Berechnen von z

Da die Seiten des Quaders gleich lang sind, muss er die Form eines Würfels haben.

5.38 Eine stetige Funktion $z = f(x, y)$ hat im Punkt P ein Extremum. Kreuze an, welche der folgenden Aussagen zutrifft.

C

P ist ein Extrempunkt, da gilt: $f_x = f_y = 0$ und $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$	☐
P ist ein Maximum, da gilt: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ und $f_{xx} > 0$	☐
P ist ein Maximum, da gilt: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ und $f_{xx} < 0$	☐
P ist ein Minimum, da gilt: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} > 0$	☐
P ist ein Minimum, da gilt: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} < 0$	☐

Funktionen in mehreren Variablen

Aufgaben 5.39 – 5.43: Untersuche jeweils die angegebene Funktion auf lokale Extrempunkte und Sattelpunkte. Berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

B **5.39** **a)** $z = 5x^2 + 3y^2 - 2xy + 3$ **b)** $z = -6x^2 - 8y^2 + 3xy - 6$

B **5.40** **a)** $z = 3x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 4$ **b)** $z = x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 6y^2 - 8$

B **5.41** **a)** $z = -x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6$ **b)** $z = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$

B **5.42** **a)** $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x - 4y$ **b)** $z = x^2 + 2xy + 0{,}5y^2 + 2x + 4y - 7$

B **5.43** **a)** $f(m, n) = 3m^3 + n^3 - 3n^2 - 36m$ **b)** $f(r, s) = s^3 - 3r^2s$

ABD **5.44** Zerlege die Zahl 100 so in drei Summanden, dass die Summe deren Quadrate minimal ist. Begründe, warum es sich bei diesem Extremwert um ein Minimum handeln muss.

ABC **5.45** Eine Blumenkiste wird in Form eines Prismas mit rechteckiger Grundfläche angefertigt. Sie soll 150 Liter Blumenerde fassen.

1) Berechne die Abmessungen der Kiste so, dass die Oberfläche aller fünf Seitenflächen minimal ist.

2) Stelle die Funktion zur Ermittlung der minimalen Oberfläche grafisch dar.

3) Gib die Gleichung der Tangentialebene am Mimimum an und zeichne sie ein.

AB **5.46** Aus einer rechteckigen, dünnen Kunststoffplatte soll ein oben offener Verpackungsbehälter zugeschnitten werden. Zu diesem Zweck werden an den Ecken Quadrate mit der Seitenlänge x herausgeschnitten und die entstandenen Rechtecke nach oben gebogen und zusammengeklebt. Dieser Verpackungsbehälter soll ein maximales Volumen aufweisen. Welche Abmessungen muss die Kunststoffplatte mit einer Fläche $A = 144\ \text{cm}^2$ aufweisen?

BCD **5.47** Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v unter einem Winkel α zur Horizontalebene abgeworfen, so wird dieser Wurf durch eine Parabel beschrieben.

Für die Wurfweite w gilt: $w(v, \alpha) = \frac{v^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$ $\left(g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)$

1) Gib einen sinnvollen Definitionsbereich für den Winkel α an.

2) Stelle die Funktion $w(v, \alpha)$ für den Definitionsbereich aus **1)** grafisch dar.

3) Argumentiere anhand der Grafik, ob es möglich ist, die maximale Wurfweite bei einer bestimmten Geschwindigkeit bzw. bei einem bestimmten Winkel zu ermitteln.

4) Erkläre, bei welchem Winkel bei einer bestimmten Geschwindigkeit die maximale Wurfweite erreicht wird.

AB **5.48** In einem Museum soll ein Objekt im Punkt P von einer Lichtquelle L mit konstanter Lichtstärke I_0 möglichst gut ausgeleuchtet werden. Für die Beleuchtungsstärke E gilt das Lambert'sche Gesetz (Johann Lambert, schweizer Mathematiker, 1728 – 1777):

$E(\alpha, r) = \frac{I_0 \cdot \cos(\alpha)}{r^2}$ α … Einfallswinkel, r … Abstand zwischen Objekt und Lichtquelle

Berechne, in welcher Höhe h und in welcher horizontalen Entfernung a zum Objekt die Lichtquelle L angebracht werden muss.

5.5 Lineare Fehlerfortpflanzung

AB

5.49 In der nebenstehenden Abbildung sieht man ein Messgerät. Bei einigen Geräten ist eine so genannte Genauigkeitsklasse angegeben. Diese gibt Auskunft über die Messgenauigkeiten des Geräts. Ist bei einem Messgerät diese Genauigkeitsklasse mit einem Wert von 2,5 angeführt, so bedeutet das, dass der tatsächliche Wert um maximal 2,5 % vom angezeigten Wert abweicht.

1) Es werden mit diesem Gerät 100 V gemessen. In welchem Bereich liegt der Messwert tatsächlich?

2) Wie groß ist der absolute Fehler bei einer Messung von 70 V maximal?

In sehr vielen technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungen ist man mit Messdaten konfrontiert, aus denen Schlüsse gezogen und Interpretationen durchgeführt werden. Auch wenn Versuche stets unter den gleichen Bedingungen und mit größter Sorgfalt durchgeführt werden, sind Messdaten fehlerbehaftet. Jedes Messgerät kann fehlerhaft sein und die Werte können auch nicht immer exakt abgelesen werden. Daher werden Toleranzen auf den Messgeräten angegeben und die Toleranzbereiche bei Ergebnissen mit „±" angeführt, zB: Die Spannung beträgt (5 ± 0,1) V.

Einige Größen können nicht direkt bestimmt werden, wie zum Beispiel Halbwertszeiten von 10^6 Jahren. Um diesen Wert trotzdem zu bestimmen, verwendet man eine leichter zugängliche Größe, wie die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde, deren Zusammenhang mit der gesuchten Größe bekannt ist. Dabei wirken sich Messfehler bei der Bestimmung der unabhängigen Größen auf die Genauigkeit der abhängigen Größe aus.

Um Aufschluss darüber zu erhalten, wie sich bei der Messung einer Größe z, die von den Größen x und y abhängt, Messfehler Δx und Δy auswirken, benötigt man eine weitere Rechenmethode.

Vollständiges Differential

Bei einer Funktion $z = f(x, y)$ in zwei Variablen liefern die beide partiellen Ableitungen erster Ordnung f_x und f_y im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$ die Anstiege der beiden Tangenten in x- und y-Richtung, die eine Tangentialebene τ in P aufspannen (vgl. Abschnitt 5.2).

Werden die voneinander unabhängigen Variablen x_0 und y_0 um Δx bzw. Δy verändert, so ergibt sich auch eine Änderung Δz des Funktionswerts z_0:

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0)$

Für die Gleichung der Tangentialebene im Punkt P gilt:

$\tau: z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Setzt man in dieser Gleichung für geringfügige Änderungen $\Delta x = (x - x_0) = dx$ und $\Delta y = (y - y_0) = dy$, so erhält man für Δz die Gleichung:
$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$

Die Änderung dz des Funktionswerts wird **vollständiges Differential** genannt.

Funktionen in mehreren Variablen

Wird an eine Funktion $z = f(x, y)$ im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$ eine Tangentialebene gelegt, so versteht man unter dem **vollständigen Differential** dz eine Näherung der Gesamtänderung der Höhenkoordinate z auf der Tangentialebene im Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$, wenn sich die x-Koordinate um $\Delta x = dx$ und die y-Koordinate um $\Delta y = dy$ ändert.
Das vollständige Differential wird berechnet durch:
$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$

Durch diese näherungsweise Berechnung darf die Fläche $z = f(x, y)$ durch die Tangentialebene in der unmittelbaren Umgebung von P ersetzt werden. Diese Näherung ist ein wesentlicher Bestandteil der Berechnung bei der Fehlerfortpflanzung.

Beim **linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz** werden Differentiale dx und dy durch die Messungenauigkeiten Δx und Δy ersetzt. Somit erhält man den maximalen Fehler Δz_{max}.

Nach dem **linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz** lässt sich der **maximale Fehler** Δz_{max} näherungsweise berechnen durch

$$|\Delta z_{max}| = |f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x| + |f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y|.$$

Dabei stellen Δx und Δy die Messungenauigkeiten der gemessenen Werte x_0 und y_0 dar.
Der Wert für $z = f(x, y)$ wird dann in der Form $z = z_0 \pm \Delta z_{max}$ angegeben.

BC **5.50** Bei einem zylinderförmigen Körper aus Platin und Iridium misst man den Radius $r = (1{,}95 \pm 0{,}02)$ cm und die Höhe $h = (3{,}90 \pm 0{,}01)$ cm. Ermittle den maximalen Fehler bei der Berechung seines Volumens $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:
Ich stelle die Funktion des Volumens auf und ermittle die partiellen Ableitungen:
$V(r, h) = r^2 \cdot \pi \cdot h \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = 2r \cdot \pi \cdot h \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = r^2 \cdot \pi$

Zur Berechnung des maximalen Fehlers verwende ich das vollständige Differential. Dabei setzte ich für $\Delta r = 0{,}02$ und für $\Delta h = 0{,}01$ ein.

$|\Delta V_{max}| = |2r\pi h \cdot \Delta r| + |r^2\pi \cdot \Delta h| = 2 \cdot 1{,}95 \cdot \pi \cdot 3{,}90 \cdot 0{,}02 + 1{,}95^2 \cdot \pi \cdot 0{,}01$

$|\Delta V_{max}| = 1{,}075131...\ \text{cm}^3$

Für das Volumen des Körpers gilt: $V = V_0 \pm \Delta V_{max} = r^2 \cdot \pi \cdot h \pm \Delta V_{max}$
$V = (46{,}589033... \pm 1{,}075131...)\ \text{cm}^3$

Aufgaben 5.51 – 5.52: Bestimme jeweils das vollständige Differential der Funktion $z = f(x, y)$.

B **5.51** ***a)*** $z = 4x^2 + 3y^2 - 5$ ***b)*** $z = 2yx^3 + 6xy^2 + 3x - 4y$ ***c)*** $z = x^2 \cdot \sqrt{y} + 3y \cdot \sqrt{x}$

B **5.52** ***a)*** $z = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(y)$ ***b)*** $z = y^2 \cdot \tan(x)$ ***c)*** $z = y \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(y)$

CD **5.53** Die Seiten eines Rechtecks werden vergrößert.
1) Gib den ursprünglichen und den neuen Flächeninhalt an.
2) Erkläre, welche der farbig dargestellten Flächen den Unterschied zwischen der tatsächlichen Flächenänderung und dem vollständigen Differential darstellt.

Δx
x
y
Δy

Aufgaben 5.54 – 5.60: Löse die Aufgaben mithilfe des vollständigen Differentials.

5.54 Es werden quaderförmige Schmucksteine mit einer Kantenlänge von $a = b = (6 \pm 0{,}1)$ mm und einer Höhe $h = (9 \pm 0{,}1)$ mm hergestellt. 80 solcher Quader werden für eine Halskette benötigt. Welche Masse hat diese Kette minimal bzw. maximal, wenn sie aus

AB

a) Gold mit einer Dichte von $19{,}32\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ angefertigt wird?

b) Amethyst mit einer Dichte von $2{,}65\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ angefertigt wird?

c) Kunststoff mit einer Dichte von $0{,}80\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ angefertigt wird?

5.55 Die Form eines Hohlraums in einem Eisberg kann durch ein Rechteck mit einem aufgesetzten Halbkreis angenähert werden. Der Radius r des Halbkreises beträgt $r = (4{,}6 \pm 0{,}3)$ m und die Höhe h des Rechtecks $h = (18{,}4 \pm 0{,}2)$ m.
Berechne den Umfang des Querschnitts des Hohlraums und gib den maximalen Fehler an.

AB

5.56 Von einem rechtwinkligen Dreieck werden die Hypotenuse $c = (192{,}0 \pm 0{,}4)$ cm und die Kathete $b = (120{,}0 \pm 0{,}2)$ cm gemessen. Berechne die Länge der Kathete a und gib den maximalen Fehler an.

B

5.57 Von einem Dreieck kennt man die Seitenlänge c = 64 mm und die Seitenlänge a = 35 mm. Der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel muss genau $\beta = 68°$ betragen. Es wird angenommen, dass die Seitenlängen mit einer Genauigkeit von ± 0,2 mm gemessen wurden. Berechne unter Angabe des maximalen Fehlers

AB

1) die Seite b, **2)** den Flächeninhalt des Dreiecks.

5.58 Ein Zuckerhut in Form eines Kegels hat den Radius r = 24,4 cm und die Höhe h = 52,6 cm.

AB

1) Welche Masse hat der Kegel, wenn die Dichte des Zuckers $\rho = 1{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt?

2) Wie groß ist der maximale Fehler, den man für die Berechnung der Masse erhält, wenn der Radius und die Höhe des Kegels mit einer Genauigkeit von ± 0,2 cm gemessen wurden?

5.59 Eine Auffahrtsrampe für Rollstuhlfahrer soll mit einem Gefälle von (10 ± 1) % errichtet werden, um zwei Stufen eines Lokals zu je (15 ± 1) cm überwinden zu können.

AB

1) Wie groß ist die maximale Länge der Rampe? Wie groß ist die minimale Länge?

2) Der Zugangsbereich zum Lokal ist (2,50 ± 0,02) m lang. Reicht die Länge des Bereichs für die Errichtung der Rampe aus?

5.60 Aus einem Karton soll das Modell eines Leuchtturms in Form eines Kegelstumpfs angefertigt werden. Der Radius r_1 der Bodenfläche soll $r_1 = (5{,}0 \pm 0{,}4)$ cm, der Radius r_2 der Deckfläche $r_2 = (2{,}5 \pm 0{,}2)$ cm und die Seitenkante genau s = 15 cm betragen.

AB

1) Berechne die Oberfläche des Leuchtturms.

2) Ermittle, um wie viel cm^2 sich die Oberfläche verändert, wenn die Radien jeweils um 5 % vergößert werden.

Funktionen in mehreren Variablen

Zusammenfassung

Eine Funktion $z = f(x, y)$ in zwei Variablen stellt eine **Ebene** oder **gekrümmte Fläche** in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dar.

Partielle Ableitung erster Ordnung **nach der Variable x**: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$

Partielle Ableitung erster Ordnung **nach der Variable y**: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

Die Berechnungen erfolgen in der Reihenfolge, in der die Indizes angegeben sind.
Die Ableitungen f_{xy} und f_{yx} nennt man **gemischt partielle Ableitungen**.

Satz von Schwarz
Die gemischt partiellen Ableitungen einer stetigen Funktion $z = f(x, y)$ sind gleich: $f_{xy} = f_{yx}$

Extremwerte
Notwendige Bedingungen: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
Hinreichende Bedinung: $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum; $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

Vollständiges Differential: $dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy$

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz: $|\Delta z_{max}| = |f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x| + |f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y|$

Weitere Aufgaben

B **5.61** Berechne die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $z = f(x, y)$.

a) $z = 5x^3y^2 - 3y^3$ **c)** $z = 6x^2 - 3y^2x + 4x^4$ **e)** $z = 8y^4 + 5x^5y^3 - 2x^3$

b) $z = \sqrt{2x^2 - 3y}$ **d)** $z = \sqrt[3]{x^2 + 5y}$ **f)** $z = 3x \cdot \sin(2y + \pi)$

B **5.62** Ermittle die Gleichung der Tangentialebene im angegebenen Punkt.

a) $z = -5x^3y^2 + 2xy^3 - 6x + 3y$, $P(3|2|z_0)$ **c)** $z = \sqrt{3x^3 - 6x^2y + 4y^4}$, $R(1|5|z_0)$

b) $z = (6x^2 + 5y^3) \cdot (4x^3 - 6y)$, $Q(-1|4|z_0)$ **d)** $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, $S(-4|-2|z_0)$

ABCD **5.63** Die gefühlte Temperatur ist bei Wind geringer als die tatsächliche Temperatur. Es gibt viele Näherungen, mit denen die so genannte Windchill-Temperatur ermittelt wird.
Eine davon lautet: $WCT(v, \vartheta_a) = 13{,}12 + 0{,}6215 \cdot \vartheta_a - 11{,}37 \cdot v^{0{,}16} + 0{,}3965 \cdot \vartheta_a \cdot v^{0{,}16}$
WCT … Windchill-Temperatur in °C, v … Windgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$,
ϑ_a … Temperatur in °C

1) Ermittle die Windchill-Temperatur für $\vartheta_a = -5$ °C und $v = 15\,\frac{km}{h}$.
2) Stelle die Funktion $WCT(v, \vartheta_a)$ grafisch dar.
3) Ermittle die partielle Ableitung $\frac{\partial WCT}{\partial v}$ und erkläre deren Bedeutung.

BCD **5.64** Überprüfe die Gültigkeit des Satzes von Schwarz. Beschreibe deine Vorgehensweise.
a) $z = 4x^2 + 5y^3$ **b)** $z = \ln(x) \cdot \cos(y)$ **c)** $z = e^{xy} \cdot \sin(3x + y)$

Extremwertaufgaben

5.65 Zerlege die Zahl 120 so in drei Zahlen, dass die Summe der Produkte von je zwei Zahlen maximal wird. AB

5.66 Ermittle, welcher Punkt der Fläche z dem Koordinatenursprung am nächsten liegt. AB
a) $2x - y + 2z = 16$ ***b)*** $z = xy - 1$ ***c)*** $2x + 9y - 3z = 18$

Lineare Fehlerfortpflanzung

5.67 Annähernd kugelförmige Regentropfen haben einen Radius von $r = (0{,}15 \pm 0{,}10)$ mm. In der Stadt Salzburg mit einer Fläche von 65,678 km^2 fallen während eines Regenschauers etwa 10^{17} Tropfen vom Himmel herab. AB
1) Ermittle die maximale Regenmenge in Liter.
2) Berechne die maximale Regenmenge pro m^2.

Aufgaben in englischer Sprache

function of several variables	Funktion in mehreren Variablen	propagation of error	Fehlerfortpflanzung
higher-order partial derivative	partielle Ableitung höherer Ordnung	Schwarz's theorem, Clairaut's theorem	Satz von Schwarz
(mixed) partial derivative	(gemischt) partielle Ableitung	total differential	vollständiges Differential

5.68 The Flesch reading ease (created by Rudolf Flesch, Austrian author, 1911 – 1986) is used to predict the reading ease E of a passage of words in english language: ABCD
$E(s, w, y) = 206.835 - 1.015 \cdot \frac{w}{s} - 84.600 \cdot \frac{y}{w}$
w … number of all words, s … number of all sentences, y … number of all syllables
1) Calculate the reading ease E for w = 1 000, s = 100, y = 200 and for w = 500, s = 60, y = 80. Compare the results and interpret the different reading eases.
2) Calculate $\frac{\partial E}{\partial w}$ and $\frac{\partial E}{\partial y}$ and explain their meaning.

5.69 A flat plate made by copper is located on a coordinate plane. The temperature of the plate is given by $T(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 8x + 4y$ (T … temperature in °C). Find the minimum temperature and where it occurs. Is there a maximum temperature? ABD

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann die partiellen Ableitungen f_x und f_y der Funktion f berechnen. ZB: $f(x, y) = 2x^2 + \cos(4x^3y)$	
2	Ich kenne den Satz von Schwarz und kann die Kurzversion für eine Funktion in zwei Variablen angeben.	
3	Ich kann die folgenden Aussagen zur Ermittlung eines Extremwerts einer Funktion f(x, y) in zwei Variablen richtig interpretieren. A) $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ B) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ C) $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	
4	Ich kenne die Bedeutung des folgenden Ausdrucks: $\lvert\Delta z_{max}\rvert = \lvert f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x\rvert + \lvert f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y\rvert$	

Lösung:
1) $f_x = 4x - 12x^2y \cdot \sin(4x^3y)$, $f_y = -4x^3 \cdot \sin(4x^3y)$ 2) $f_{xy} = f_{yx}$ 3) siehe Seite 138 4) siehe Seite 142

6 Lineare Optimierung

In vielen mathematischen Aufgaben geht es im Wesentlichen um das Auffinden eines unter gewissen Gesichtspunkten optimalen Werts, wie dies zum Beispiel bei Extremwertaufgaben der Fall ist. Im Folgenden wird eine weitere Methode vorgestellt, um unter vielen möglichen Lösungen die optimale Lösung zu finden. Diese Optimierungsaufgaben werden beispielsweise bei der Produktionsplanung oder im Transportwesen angewendet.

6.1 Einleitung

ABC **6.1** Die Veranstalter eines jährlich stattfindenden Schulballs verkaufen unterschiedlich teure Eintrittskarten. Die Erwachsenenkarte kostet 27,00 € und die Schülerkarte kostet 18,00 €.

1) Stelle eine Formel für die Einnahmen aus dem Kartenverkauf auf.
x … Anzahl der Erwachsenenkarten, y … Anzahl der Schülerkarten

2) Im ersten Jahr werden 300 Erwachsenenkarten und 1 050 Schülerkarten verkauft, im zweiten Jahr 250 Erwachsenenkarten und 1 125 Schülerkarten und im dritten Jahr 350 Erwachsenenkarten und 975 Schülerkarten. Vergleiche die jeweils erzielten Einnahmen.

3) Trage die Anzahl der Erwachsenenkarten und der Schülerkarten aus ***2)*** in ein Koordinatensystem ein. Was fällt dir auf? Finde ein weiteres Zahlenpaar, das dieselbe Eigenschaft hat.

Das Lösen von Optimierungsaufgaben erfordert es, verbal formulierte Bedingungen als Gleichungen bzw. Ungleichungen anzugeben.

ZB: Für verschiedene Attraktionen eines Vergnügungsparks gibt es Beschränkungen.
E … Anzahl der Erwachsenen, K … Anzahl der Kinder

Bedingung	**Gleichung bzw. Ungleichung**
Ein Ringelspiel ist nur für Kinder zugelassen. Es hat maximal 20 Sitzplätze.	$E = 0$ $K \leq 20$
Eine Attraktion darf nur von maximal 30 Erwachsenen benutzt werden, Kinder zählen als halbe Erwachsene.	$E + 2K \leq 30$
Jedes Kind muss von mindestens einem Erwachsenen begleitet werden.	$K \leq E$

Der Bereich, in dem alle Bedingungen, die für ein Problem von Bedeutung sind, erfüllt sind, heißt **Lösungsbereich** oder **zulässiger Bereich**. Aus allen möglichen Werten dieses Bereichs soll nun jener Wert ermittelt werden, der für eine bestimmte Fragestellung der „beste" ist.
Das Verfahren zum Auffinden dieser „besten" Lösung nennt man **lineare Optimierung**. Hängen die Bedingungen von höchstens zwei Variablen ab, so kann die Lösung grafisch ermittelt werden, andernfalls benötigt man andere Methoden.

Im Allgemeinen handelt es sich bei den gesuchten Größen um solche, die nur positive Werte annehmen. Dies wird durch die so genannten **Nichtnegativitätsbedingungen** ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ausgedrückt.

6.2 Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme

6.2 Gib zur Geraden g: $y = \frac{3}{4}x + 1$ jeweils einen Punkt $P(1|y_p)$ an, der auf, über bzw. unter der Geraden liegt.

Die Lösung einer linearen Ungleichung $ax + by > c$ bzw. $ax + by < c$ sind alle Punkte, die oberhalb oder unterhalb einer Geraden g: $ax + by = c$ liegen. Die xy-Ebene wird durch diese Gerade in zwei **Halbebenen** geteilt.

ZB:

Wird die Ungleichung mit < bzw. > angegeben, erhält man eine **offene Halbebene**, die Punkte auf der Randgeraden gehören nicht dazu. Eine **abgeschlossene Halbebene** – inklusive Randgeraden – erhält man mittels ≤ bzw. ≥, zB:

offene Halbebene

$y > 0{,}5x - 1$

abgeschlossene Halbebene

$y \geq 0{,}5x - 1$

Um ein System von zwei oder mehreren linearen Ungleichungen grafisch zu lösen, stellt man die Lösungsmenge jeder Ungleichung als Halbebene dar. Die **Lösungsmenge des Ungleichungssystems** ist dann der **Durchschnitt aller Halbebenen**. Diese Lösungsmenge kann dabei beschränkt, unbeschränkt oder leer sein.

beschränkte Lösungsmenge | unbeschränkte Lösungsmenge | leere Lösungsmenge

Technologieeinsatz: Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme
TI-Nspire

In der Eingabezeile für Funktionen erscheint nach dem Entfernen des =-Zeichens eine Auswahl, in der auch Ungleichheitszeichen angeboten werden.

Bei Ungleichungssystemen ist übersichtlicher, nur die Funktionsgleichungen einzugeben und dann den Zielbereich durch einen Polygonzug hervorzuheben:
8: Geometry,
2: Formen,
4: Polygon

TE GeoGebra: www.hpt.at

Lineare Optimierung

Aufgaben 6.3 – 6.5: Stelle die Lösungsmenge grafisch dar.

B **6.3** **a)** $y > 4$ **b)** $y < -2$ **c)** $y \geqslant 5$ **d)** $y \leqslant -1$

B **6.4** **a)** $x > -3$ **b)** $x < 0$ **c)** $x \geqslant -4$ **d)** $x \leqslant 2$

B **6.5** **a)** $5x < 8y$ **b)** $-7x \leqslant 4y$ **c)** $-5x - 18y > 0$ **d)** $x \geqslant -y$

AC **6.6** Gib die passende Ungleichung zur dargestellten Halbebene an.

a) **b)** **c)** **d)**

BC **6.7** Stelle die Lösungsmenge des Ungleichungssystems grafisch dar.

I: $x + 3y \geqslant 6$
II: $4x > y + 1$

Lösung:

I: $x + 3y \geqslant 6 \quad \Rightarrow \quad y \geqslant -\frac{1}{3}x + 2$
II: $4x > y + 1 \quad \Rightarrow \quad y < 4x - 1$

Aufgaben 6.8 – 6.9: Stelle jeweils die Lösungsmenge des Ungleichungssystems grafisch dar.

BC **6.8**
a) I: $x > 4$; II: $y \geqslant 3{,}5$
b) I: $x < 5$; II: $y > -2$
c) I: $2x + y \leqslant 9$; II: $x + 2y > -1$
d) I: $0{,}5x - 2y > 1$; II: $x + 0{,}2y \leqslant 0{,}5$

BC **6.9**
a) I: $x - y \geqslant 5$; II: $x + 2y \leqslant 5$; III: $y \geqslant 0$
b) I: $x < 5$; II: $x + y \geqslant 8$; III: $4x + 5y \leqslant 20$
c) I: $x + 3y \geqslant -8$; II: $2x - y \geqslant -16$; III: $x - 4y < 23$
d) I: $x + y \geqslant 0$; II: $-2x + y \leqslant 2$; III: $3x + y > 9$

AC **6.10** Gib das zum markierten Bereich gehörige Ungleichungssystem an.

a) **b)** **c)** **d)**

C **6.11** Ordne den markierten Bereichen jeweils das passende Ungleichungssystem zu.

A	$y \leqslant 2x + 4,\ y \leqslant -x + 6,\ y \leqslant 3$
B	$y \leqslant 0{,}5x + 4,\ y < -x + 6,\ y \leqslant 3$
C	$y \leqslant 0{,}5x + 4,\ y \leqslant -x + 6,\ y \leqslant 3$
D	$y \leqslant 2x + 4,\ y < -x + 6,\ y \leqslant 3$

6.3 Lösungsverfahren für lineare Optimierungsaufgaben

Die Vorgehensweise bei der Lösung von linearen Optimierungsaufgaben wird anhand von Beispielen erklärt. Zum besseren Verständnis werden die Aufgabenstellungen bzw. Zahlenangaben zum Teil vereinfacht.

Maximumaufgabe

In einem Produktionsbetrieb werden mithilfe dreier Maschinen M_1, M_2 und M_3 zwei verschiedene Werkstücke A und B hergestellt. Das Werkstück A wird zuerst von der Maschine M_1 eine Stunde lang bearbeitet, dann von M_2 vier Stunden und anschließend von M_3 zwei Stunden. Das Werkstück B wird von M_1 drei Stunden, von M_2 drei Stunden und von M_3 eine Stunde bearbeitet. Insgesamt steht die Maschine M_1 für maximal 24 Wochenstunden zur Verfügung, Maschine M_2 für maximal 42 Wochenstunden und Maschine M_3 für maximal 20 Wochenstunden. Der Gewinn für ein Werkstück A beträgt 215,00 €, der Gewinn für B 327,00 €. Es soll ermittelt werden, wie viele Werkstücke von A und B hergestellt werden sollten, damit der Gewinn möglichst groß wird.

Maschine	Anzahl der Arbeitsstunden		Maximale Wochenstundenanzahl
	für A	für B	
M_1	1	3	24
M_2	4	3	42
M_3	2	1	20
Gewinn	215,00 €	327,00 €	

- Die Angaben werden in Form einer Tabelle angeschrieben.

x … Stückanzahl von A, y … Stückanzahl von B

I: $x + 3y \leqslant 24 \Rightarrow y \leqslant -\frac{1}{3}x + 8$

II: $4x + 3y \leqslant 42 \Rightarrow y \leqslant -\frac{4}{3}x + 14$

III: $2x + y \leqslant 20 \Rightarrow y \leqslant -2x + 20$

IV: $x \geqslant 0$ und V: $y \geqslant 0$

- Die gegebenen Bedingungen werden anschließend als Ungleichungen formuliert. Zusätzlich gelten die Nichtnegativitätsbedingungen. Man erhält ein Ungleichungssystem.

$G = 215 \cdot x + 327 \cdot y \rightarrow \text{maximal}$

$y = -\frac{215}{327}x + \frac{G}{327}$

- Der Gewinn kann mithilfe der Funktion G ermittelt werden. Diese Funktion nennt man die **Zielfunktion**.
- Um die Zielfunktion grafisch darzustellen, wird sie in Normalform umgeformt. Man erkennt, dass der y-Achsenabstand von G abhängt.
- Der Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems wird in ein Koordinatensystem eingezeichnet.
- Es wird üblicherweise jene Zielfunktion eingezeichnet, die durch den Koordinatenursprung geht. Diese wird so parallel verschoben, dass der Ordinatenabstand und damit G möglichst groß wird. Die Gerade muss noch durch mindestens einen Punkt des Lösungsbereichs verlaufen. Dieser „letzte" Punkt ist die Lösung der Optimierungsaufgabe, hier P(6|6).

Es sollten daher jeweils sechs Stück von jedem Werkstück hergestellt werden.

Lineare Optimierung

Minimumaufgabe

Bei einer Minimumaufgabe beschreibt die Zielfunktion jene Größe, die minimal werden soll. Dies können zum Beispiel die Produktionskosten oder der Energieverbrauch sein. Die Lösungsmethode ist analog zu jener bei Maximumaufgaben.
Im nebenstehenden Diagramm sind die geringsten Kosten K_{min} gesucht. Wie im Diagramm ersichtlich, ergeben sich nun die geringsten Kosten K_{min} durch die „erstmalige" Berührung mit dem Lösungsbereich.

Sind für die beiden Variablen einer Optimierungsaufgabe reelle Zahlen zulässig, so gilt der **Hauptsatz der linearen Optimierung**.

Hauptsatz der linearen Optimierung
Die optimale Lösung linearer Optimierungsaufgaben liegt immer am Rand des Lösungsbereichs.

Wird das Maximum bzw. Minimum in genau einem Punkt angenommen, so ist die Optimierungsaufgabe eindeutig lösbar. Dies muss aber nicht immer der Fall sein. Verläuft der Graph der Zielfunktion parallel zu einer Seite des Lösungsbereichs, so ist jeder Punkt dieser Seite eine optimale Lösung des Problems.

ZB: Ein Ungleichungssystem lautet:
I: $y \leqslant -0{,}5x + 7$
II: $y \leqslant -4x + 25$

Die Zielfunktion lautet:
$Z = 150x + 300y \Rightarrow y = -0{,}5x + \frac{Z}{300}$

Jeder Punkt der rot markierten Seitenkante des Lösungsbereichs liefert einen maximalen Wert.
ZB: $P_1(2|6) \Rightarrow Z = 150 \cdot 2 + 300 \cdot 6 = 2\,100$;
$P_2(4|5) \Rightarrow Z = 150 \cdot 4 + 300 \cdot 5 = 2\,100$;
$P_3(3|5{,}5) \Rightarrow Z = 150 \cdot 3 + 300 \cdot 5{,}5 = 2\,100$;
aber $P_4(6|1) \Rightarrow Z = 150 \cdot 6 + 300 \cdot 1 = 1\,200 \neq 2\,100$

Die Eckpunkte eines Lösungsbereichs müssen keine ganzzahligen Werte annehmen. Oft sind aber nur ganzzahlige Lösungen sinnvoll. Abhilfe schafft hier die Verwendung eines ganzzahligen Rasters.

ZB: Ein Ungleichungssystem lautet:
I: $y \leqslant 3{,}5$
II: $y \leqslant -2x + 7{,}5$

Die Zielfunktion lautet:
$Z = x + y \Rightarrow y = -x + Z$

Die optimale Lösung liegt im Punkt P. Für die ganzzahlige Lösung wird die Zielfunktion nur bis zum letzten Rasterschnittpunkt im Lösungsbereich verschoben. Man erhält den Lösungspunkt Q.

Lösung mit ganzzahligen Anteilen: $Q(2|3) \Rightarrow Z = 2 + 3 = 5$
Optimale Lösung: $P(2|3{,}5) \Rightarrow Z = 2 + 3{,}5 = 5{,}5$

B

GeoGebra, Excel: www.hpt.at

6.12 Markus findet zwei Vitaminmischungen V1 und V2 im Handel. Eine Kapsel von V1 enthält 5 mg Vitamin B, 36 mg Vitamin C und 0,7 mg Vitamin E. V2 enthält 7 mg Vitamin B, 12 mg Vitamin C und 0,5 mg Vitamin E. Beide Packungen beinhalten gleich viele Kapseln. V1 kostet 4,00 € und V2 kostet 5,00 €. Markus möchte täglich eine Mindestmenge von 35 mg Vitamin B, 108 mg Vitamin C und 3,5 mg Vitamin E einnehmen und dabei möglichst wenig ausgeben. Berechne die Anzahl der Kapseln pro Vitaminmischung, die er zu sich nehmen muss.

Lösung mit TI-Nspire:

	V1	V2	min. Tagesmenge
Vitamin B in mg	5	7	35
Vitamin C in mg	36	12	108
Vitamin E in mg	0,7	0,5	3,5
Kosten	4,00 €	5,00 €	

- Angabe in Form einer Tabelle anschreiben

x … Kapselanzahl von V1
y … Kapselanzahl von V2

I: $5x + 7y \geqslant 35$
II: $36x + 12y \geqslant 108$
III: $0{,}7x + 0{,}5y \geqslant 3{,}5$
IV: $x \geqslant 0$ und V: $y \geqslant 0$

$Z = 4x + 5y \longrightarrow$ minimal

- Die Bedingungen als Ungleichungen formulieren
- Nichtnegativitätsbedingungen hinzufügen
- Zielfunktion anschreiben

solve$(5\cdot x+7\cdot y\geq 35,y)$ $\quad y\geq\frac{-5\cdot(x-7)}{7}$

f1$(x)=\frac{-5\cdot(x-7)}{7}$
f2$(x)=9-3\cdot x$
f3$(x)=7-1.4x$

f4$(x)=-4/5x+z/5$

z = 27.

(3, 3)

- Mit dem Befehl **solve** können die Ungleichungen auf die Normalform umgeformt werden.
- Die umgeformten Bedingungen werden in der Applikation **Graphs** unter **3: Graphs–Eingabe/Bearbeitung**, **1: Funktion** eingegeben.
- Um ganzzahlige Ergebnisse ermitteln zu können, wird ein Gitter eingeblendet: **2: Ansicht**, **6: Gitter**, **2: Punktgitter**
- Der Zielbereich wird mithilfe eines Polygons eingezeichnet und eingefärbt: **8: Geometry**, **2: Formen**, **4: Polygon**
- Die umgeformte Zielfunktion wird mit der Formvariable z für die Kosten eingegeben.
- Mithilfe eines Schiebereglers für die Variable z kann die Zielfunktion parallel verschoben werden: **1: Aktionen**, **B: Schieberegler einfügen**. Die Zielfunktion wird bis zum ersten Gitterpunkt P(3|3) im Lösungsbereich verschoben.

Markus müsste täglich je drei Kapseln pro Mischung einnehmen.

Lineare Optimierung

Optimierungsaufgaben mit mehr als zwei Variablen

Hängt die Zielfunktion einer linearen Optimierungsaufgabe von mehr als zwei Größen ab, so kann die Aufgabe nicht mehr grafisch gelöst werden. Anhand eines so genannten **Transportproblems** wird eine Lösungsmethode mit Technologieeinsatz gezeigt.

Zwei Schottergruben S1 und S2 beliefern drei Baustellen B1, B2 und B3. S1 ist 4 km von B1 entfernt, 7 km von B2 und 10 km von B3. S2 ist 6 km von B1 entfernt, 12 km von B2 und 8 km von B3. S1 kann pro Woche 15 LKW-Fuhren liefern und S2 kann 20 Fuhren liefern. B1 benötigt 10 Lieferungen, B2 benötigt 5 und B3 benötigt 14 Lieferungen. Der kürzeste Fahrweg, um alle drei Baustellen ausreichend beliefern zu können, ist zu ermitteln.

TE

Lösung mit Excel 2010:
Optimierungsaufgaben können in Excel mithilfe des **Solvers** gelöst werden. Dieser muss als Add-In hinzugefügt werden (**Datei**, **Optionen**, **Add-Ins**, im Feld **Verwalten Excel-Add-Ins** auswählen und auf **Gehe zu ...** klicken, bei **Verfügbare Add-Ins** den **Solver** aktivieren). Der Solver steht dann im Register **Daten** in der Gruppe **Analyse** zur Verfügung.

- Die Werte der Angabe werden in eine Tabelle geschrieben.
- In einer weiteren Tabelle werden für die gesuchten Größen Startwerte (zB 1) und die Formeln für die Summen eingegeben.
- Die Zielfunktion (Gesamtweg) wird in der Zelle E10 berechnet.

	A	B	C	D	E
1	Angabe	B1	B2	B3	Kapazität
2	S1	4	7	10	15
3	S2	6	12	8	20
4	benötigt	10	5	14	
5					
6		B1	B2	B3	geliefert
7	S1	1	1	1	=B7+C7+D7
8	S2	1	1	1	=B8+C8+D8
9	verwendet	=B7+B8	=C7+C8	=D7+D8	
10	Weg	=B7*B2+B8*B3	=C7*C2+C8*C3	=D7*D2+D8*D3	=B10+C10+D10

- Nun wird der **Solver** aufgerufen.
- Die Zielzelle ist **$E$10** und der Wert soll ein Minimum (**Min.**) werden.
- Die Variablenzellen sind **B7:D8**.
- Durch Klicken auf **Hinzufügen** werden die Nebenbedingungen mithilfe eines weiteren Fensters eingegeben:
  Die Werte in **B7:D8** müssen ganzzahlig (**int**) und größer oder gleich 0 sein.
  Die verwendeten Mengen in **B9:D9** müssen größer oder gleich den benötigten Mengen in **B4:D4** sein.
  Die gelieferten Mengen in **E7:E8** müssen kleiner oder gleich den Kapazitäten in **E2:E3** sein.

Solver-Parameter
Ziel festlegen: $E$10
Bis: Max. Min. Wert: 0
Durch Ändern von Variablenzellen:
$B$7:$D$8
Unterliegt den Nebenbedingungen:
$B$7:$D$8 = Ganzzahlig
$B$7:$D$8 >= 0
$B$9:$D$9 >= $B$4:$D$4
$E$7:$E$8 <= $E$2:$E$3
Hinzufügen
Ändern
Löschen
Alles zurücksetzen
Laden/Speichern
Nicht eingeschränkte Variablen als nicht-negativ festlegen
Lösungsmethode auswählen: Simplex-LP
Optionen
Lösungsmethode
Wählen Sie das GRG-Nichtlinear-Modul für Solver-Probleme, die kontinuierlich nichtlinear sind. Wählen Sie das LP Simplex-Modul für lineare Solver-Probleme und das EA-Modul für Solver-Probleme, die nicht kontinuierlich sind.
Hilfe Lösen Schließen

- Nach Eingabe aller Bedingungen wählt man als Lösungsmethode **Simplex-LP** und klickt auf **Lösen**.
- Nach der Berechnung erscheint ein Fenster, in dem das Ergebnis akzeptiert werden kann.

6		B1	B2	B3	geliefert
7	S1	10	5	0	15
8	S2	0	0	14	14
9	verwendet	10	5	14	
10	Weg	40	35	112	187

6.13 In einem Produktionsbetrieb werden mithilfe von vier Maschinen M_1, M_2, M_3 und M_4 zwei verschiedene Werkstücke A und B hergestellt. Die benötigten Zeiten pro Maschine (in Minuten) und deren Verfügbarkeit (in Stunden pro Tag) sind in der Tabelle angeführt. Der Gewinn für ein Werkstück A beträgt 300,00 €, der Gewinn für B 200,00 €. Ermittle, wie viele Werkstücke von A und B hergestellt werden sollten, damit der Gewinn möglichst groß wird.

AB

Maschine	A	B	verfügbar
M_1	30	60	14
M_2	60		16
M_3		60	12
M_4	40	50	10

6.14 Amalgame sind Quecksilberlegierungen aus Quecksilber und einer Mischung aus verschiedenen Metallen wie zum Beispiel Silber, Zinn oder Kupfer. Aus zwei Metallmischungen, die aus den Elementen Silber, Zinn und Kupfer bestehen, soll eine neue Mischung entstehen. Die erste Mischung enthält 50 % Silber, 30 % Zinn und 20 % Kupfer, die zweite 30 % Silber, 35 % Zinn und 35 % Kupfer. Die Mindestmenge an Silber in der neuen Mischung soll 15 g, an Zinn 12 g und an Kupfer 11 g betragen. Dabei betragen die Kosten für ein Kilogramm der ersten Mischung 3 600,00 € und für ein Kilogramm der zweiten Mischung 2 700,00 €.
Ermittle grafisch, wie viel von jeder Mischung verwendet werden muss, um die Kosten für die neue Mischung möglichst gering zu halten. Berechne die Höhe dieser Kosten.

AB

6.15 Ein österreichisches Autozulieferunternehmen erzeugt Automotoren mit 54 kW und 67 kW Leistung. Täglich können maximal 600 Stück mit 54 kW und 400 Stück mit 67 kW erzeugt werden. Die Abnehmerfirma kann maximal 700 Autos pro Tag mit diesen Motoren bestücken. Der Gewinn für einen 54-kW-Motor beträgt 700,00 €, der für den 67-kW-Motor 1 750,00 €. Ermittle grafisch, wie viele Motoren von jedem Typ täglich erzeugt werden müssen, damit der Gewinn maximal wird. Berechne diesen maximalen Gewinn.

AB

6.16 Die Geschäftsführerin einer Blumenhandlung mischt für ihre Stammkundschaften einen Spezialdünger. Dabei stehen ihr zwei mineralische Feststoffdünger zur Verfügung, deren Hauptbestandteile Stickstoff (N), Phosphor (P) und Kalium (K) sind. Die erste Sorte ist ein Dünger mit der Bezeichnung „NPK = 3 – 1 – 5", dieser enthält 3 % Stickstoff, 1 % Phosphor und 5 % Kalium. Die zweite Sorte trägt die Bezeichnung „NPK = 3 – 3 – 2". Die Geschäftsführerin möchte eine Spezialmischung herstellen, die mindestens 270 g Stickstoff, 150 g Phosphor und 240 g Kalium enthält, wobei die Kosten für diese Mischung minimal sein sollen. Der erste Dünger kostet 30,00 € pro Kilogramm und der zweite 70,00 € pro Kilogramm.

AB

1) Stelle das Ungleichungssystem auf, das den Zusammenhang beschreibt.
2) Berechne, wie viel sie von jeder Düngersorte für die Mischung benötigt.
3) Ermittle den Gewinn, wenn sie für ein Kilogramm ihrer Mischung 55,00 € erhält.

6.17 Eine Supermarktkette hat zwei Zentrallager Z1 und Z2. Von beiden Lagern können pro Tag maximal 30 Fahrten getätigt werden. Ein Zustellkilometer kostet 0,50 €. Es sollen drei Filialen F1, F2 und F3 beliefert werden. Z1 ist 22 km von F1 entfernt, 54 km von F2 und 134 km von F3. Z2 ist 122 km von F1 entfernt, 48 km von F2 und 36 km von F3. F1 benötigt 10 Lieferungen pro Tag, F2 benötigt 20 und F3 benötigt 15 Lieferungen.

ABC TE

1) Berechne die minimalen Zustellkosten.
2) Es wird eine vierte Filiale F4 eröffnet, die 15 km von Z1 und 115 km von Z2 entfernt ist und täglich 15 Lieferungen benötigt. Berechne die neuen minimalen Zustellkosten. Vergleiche die Anzahl der Fahrten mit den Ergebnissen aus ***1)***.

Lineare Optimierung

Zusammenfassung

Die **lineare Optimierung** ist ein Verfahren, um unter vorgegebenen Bedingungen aus unendlich vielen möglichen Lösungen die beste Lösung zu ermitteln. Bei diesem Verfahren sollen jene Punkte P(x|y) ermittelt werden, für die die Zielfunktion möglichst große (Maximum) bzw. möglichst kleine (Minimum) Werte liefert. Wird das Maximum bzw. das Minimum in genau einem Punkt angenommen, so ist die Optimierungsaufgabe eindeutig lösbar, anderenfalls gibt es mehrere Lösungen.

Weitere Aufgaben

BC **6.18** Stelle die Lösungsmenge grafisch dar.

a) $-3x - 9y < 18$ **b)** $x + 4y \geqslant 36$ **c)** $2x - 7y > 21$ **d)** $-3x + 6y \leqslant 8$

BC **6.19** Löse das Ungleichungssystem grafisch.

a) I: $x > 0$; II: $y \geqslant 7$

b) I: $x - 5y < 13$; II: $x + 2y \leqslant -12$

c) I: $2x - 4y \leqslant 5$; II: $2x + 5y > 26$; III: $5x - y > -2$

d) I: $x + 3y > 40$; II: $2x + y \leqslant 18$; III: $x - 3y \geqslant -36$

C **6.20** Gib das zum markierten Bereich gehörige Ungleichungssystem an.

a) **b)** **c)**

AB **6.21** Da reines Gold zu weich ist, werden Schmuckstücke aus Goldlegierungen hergestellt. Aus zwei Standardgoldlegierungen soll eine neue Legierung hergestellt werden. Die erste Legierung, Gold 916 (22 Karat), enthält 916 Massenpromille reines Gold und die zweite, Gold 750 (18 Karat), enthält 750 Massenpromille reines Gold. 650 g der neuen Legierung sollen mindestens 500 g Gold enthalten. Die Kosten für Gold 916 betragen 28 000,00 € pro Kilogramm, die für Gold 750 betragen 24 000,00 € pro Kilogramm, wenn man von einem langjährigen Mittelwert ausgeht.

1) Wie ist die Zusammensetzung der neuen Legierung zu wählen, damit die Kosten möglichst gering ausfallen?

2) Die neue Legierung kann um 26 500,00 € pro Kilogramm verkauft werden. Wie hoch ist der Gewinn?

ABD **6.22** Frau Michel, die Besitzerin eines Ladens für Berufskleidung in Salzburg, möchte sich vor Schulbeginn mit neuer Ware eindecken. Sie möchte 400 Artikel einkaufen und hat dafür höchstens 10 000,00 € zur Verfügung. Die Lieferfirma legt zwei Angebote vor. Ein Overall hat einen Einkaufspreis von 20,00 € und einen Verkaufspreis von 50,00 €, ein Schlosseranzug einen Einkaufspreis von 35,00 € und einen Verkaufspreis von 85,00 €.

1) Sie möchte 250 Overalls und 150 Schlosseranzüge kaufen.
Überprüfe, ob dies mit dem verfügbaren Geldbetrag möglich ist.

2) Wie muss Frau Michel ihre Bestellung zusammenstellen, damit sie einen größtmöglichen Gewinn erzielen kann?

3) Berechne die Höhe des größtmöglichen Gewinns.

Aufgaben in englischer Sprache

feasible solution	zulässige Lösung	to minimise	minimieren
inequality	Ungleichung	non-negativity constraint	Nichtnegativitäts-bedingung
linear programming	lineare Optimierung	optimal solution	optimale Lösung
to maximise	maximieren	to optimise	optimieren

6.23 The region R is bounded by the inequalities $x \geqslant 0$, $x \leqslant 6$, $y \leqslant 4$, $x + y \leqslant 7$, $2x + 5y \geqslant 10$. Show the inequalities on a graph and state the coordinates of the points within R so that $x + y = 4$, where x and y are integers. **ABC**

6.24 Sandy is selling red and yellow roses at a flower stall. She buys the flowers from a wholesaler, where red roses cost 80 cents each and the yellow roses 55 cents. Based on previous sales, she has the following constraints:
She will sell both red and yellow roses. She will sell more red roses than yellow roses.
She will sell a total of at least 200 flowers.
The wholesaler has 400 red roses and 200 yellow roses available.
Let x be the number of red roses she buys and y be the number of yellow roses she purchases. Formulate this information as a linear programming problem. Write out the constraints as inequalities and identify a suitable objective function, stating how it should be optimised. **AC**

6.25 The annual subscription for a golf club is $ 100 for adults and $ 25 for juniors. The club needs to raise $ 3 500 from subscriptions to cover its costs. The number of members is to be limited to 100. There must be at least as many adult members as juniors but not more than double of the juniors. Represent this situation graphically. Find the number of adult and junior members which will raise the most money and the largest total membership which will just cover the costs. **AB**

Wissens-Check

		gelöst
1	Kreuze jeweils die richtige Aussage für die Lösung der Ungleichung $6x - 3y > 8$ an. Die Halbebene liegt ○ oberhalb ○ unterhalb der Geraden $6x - 3y = 8$. Die Halbebene ist ○ offen. ○ abgeschlossen.	
2	Setze die Ungleichheitszeichen $\leqslant$, $\geqslant$ so ein, dass kein Lösungsbereich für das Ungleichungssystem entsteht: I: $y \;\square\; -0{,}25x + 1$ II: $4y \;\square\; -x + 3$	
3	Welche der folgenden Aussagen ist richtig? A) Bei der linearen Optimierung wird ein Extremwert der Zielfunktion gesucht. B) Existiert eine eindeutige Lösung, liegt diese an einem Eckpunkt des Lösungsbereichs. C) Bei der linearen Optimierung wird der höchste bzw. niedrigste Punkt des Lösungsbereichs gesucht.	

Lösung:
1) unterhalb, offen 2) I $\leqslant$, II $\geqslant$ 3) B

7 Graphentheorie

Straßennetze, Versorgungsnetze, soziale Netzwerke und Ähnliches lassen sich vereinfacht als Graphen darstellen. Um diese Graphen zu analysieren, benötigt man graphentheoretische Konzepte. Mithilfe der Graphentheorie können Lösungsverfahren und Algorithmen entwickelt werden, die zum Beispiel zur Optimierung von Produktionsabläufen oder zur Lösung von Versorgungsproblemen dienen. In diesem Abschnitt werden einige wichtige Grundlagen zur Graphentheorie behandelt.

7.1 Grundbegriffe

AC **7.1** Überlege, welche der beiden unten abgebildeten Grafiken in einem Zug, also ohne den Stift abzusetzen, und ohne eine Linie doppelt zu zeichnen, gezeichnet werden kann. Gib eine mögliche Buchstabenreihenfolge für das Zeichnen dieser Figur an.

1) H, A, E, F, G, B, C, D

2) D, C, E, A, B, G, H, F

Die historische Grundlage für die moderne Graphentheorie wurde von Leonhard Euler im Jahr 1736 mit dem **Königsberger Brückenproblem** gelegt, welches er in seinem Buch „*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (Die Lösung des Problems, das zur Lage der Geometrie gehört.) beschrieb. In der Stadt Königsberg (heute: Kaliningrad, Russland) führen 7 verschiedene Brücken über den Fluss Pregel. Euler versuchte einen Spaziergang durch die Stadt anzugeben, bei dem man jede dieser Brücken genau einmal benützt und danach wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Dieses Problem lässt sich mithilfe eines Graphen darstellen. Als **Graph** bezeichnet man eine Menge von **Knoten** (Punkten, Ecken), und **Kanten** (Verbindungslinien zwischen zwei Knoten). Die Knoten entsprechen hier den Stadtteilen und die Kanten den Wegen über die Brücken. Die Anzahl der einmündenden bzw. weggehenden Kanten in einen Knoten bezeichnet man als **Knotengrad**. Der Knoten A hat den Grad 5, B den Grad 3 usw.

Euler stellte fest, dass es den gesuchten Spazierweg nur dann geben kann, wenn es zu jedem Weg, der zu einem Stadtteil hinführt, auch einen weiteren gibt, der wieder davon wegführt. Das bedeutet, dass es zu jedem Stadtteil eine gerade Anzahl von Wegen geben müsste. Allgemein heißt das: Hat in einem Graphen **jeder Knoten** einen **geraden Grad**, so gibt es einen **geschlossenen Weg**, bei dem **jede Kante genau einmal** durchlaufen wird. Ein solcher Weg heißt **Eulerkreis**. Haben **genau zwei Knoten einen ungeraden Grad**, so kann man ebenfalls einen Weg finden, der genau einmal jede Kante enthält. In diesem Fall ist der Weg jedoch **nicht geschlossen**. Die beiden Knoten mit ungeradem Grad sind der Start- bzw. der Endpunkt. Ein solcher Weg heißt **offener Eulerweg**.

Ein **Graph** besteht aus einer bestimmten Anzahl von **Knoten** und **Kanten**.
Eulerweg: Jede Kante eines Graphen wird genau einmal durchlaufen.
Offener Eulerweg: Es gibt genau zwei Knoten mit ungeradem Knotengrad (Start- und Endpunkt).
Geschlossener Eulerweg (**Eulerkreis**): Alle Knoten haben einen geraden Knotengrad.

Eine Anwendung, bei der ein Eulerweg von Bedeutung ist, ist das **Müllabfuhrproblem**:
Im nebenstehenden Graphen entsprechen die Kanten jenen Straßen, aus denen der Müll abgeholt werden soll, und die Knoten den einzelnen Straßenkreuzungen. Um Zeit und Ressourcen zu sparen, soll eine Route geplant werden, bei der keine Straße doppelt befahren wird. Man sucht also nach einem Eulerweg. Da alle Knoten des Graphen einen geraden Knotengrad aufweisen, lässt sich ein geschlossener Eulerweg finden. Die roten Pfeile stellen einen möglichen Weg A-C-B-E-D-F-E-C-D-B-A dar, also eine Reihenfolge, in der der Müll abgeholt werden kann.

Die nebenstehende Zeichnung einer Parkanlage lässt sich schematisch durch einen Graphen darstellen. Anhand dieses Graphen werden weitere wichtige Begriffe erklärt:

- Beim Knoten B gibt es einen Rundwanderweg. Eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet, heißt **Schlinge**.
- Die Punkte E und D sind durch zwei Kanten miteinander verbunden. Diese Art der Verbindung nennt man **Mehrfachkante**.
- Sind zwei Knoten durch eine Kante direkt miteinander verbunden, hier zB A und E, nennt man sie **adjazent** bzw. benachbart.
- Liegt ein Knoten auf einer Kante, bezeichnet man den Knoten und die Kante als **inzident** zueinander, zB: Knoten A ist inzident zur Kante AB und umgekehrt.
- Sind in einem Graphen jeweils zwei Knoten mit höchstens einer Kante verbunden und gibt es keine Schlingen, spricht man von einem **einfachen Graphen**.
- Ein **Weg** ist eine endliche Folge aus Knoten und Kanten, wobei jede Kante nur einmal durchlaufen wird, zum Beispiel A-B-D. Wird dabei jeder Knoten nur einmal durchlaufen, dann spricht man von einem **einfachen Weg**.
  Die Bezeichnung ist nicht immer einheitlich. Oft wird eine Kantenfolge, die keine Kante mehrfach enthält, als Kantenzug bezeichnet und jene, die jeden Knoten nur einmal enthält, wird Weg genannt.
- Ein Weg, bei dem der Endknoten der Kantenfolge wieder der Anfangsknoten ist, nennt man einen **geschlossenen Weg** bzw. **Zyklus**, zum Beispiel A-B-D-E-A.

Weitere Eigenschaften von Graphen:

- Sollen Kanten in einem Graphen nur in eine Richtung durchlaufen werden, zum Beispiel Einbahnstraßen in einem Straßennetz, hier AB, dann verwendet man einen **gerichteten Graphen**. Die Richtung, in der eine Kante durchlaufen werden kann, wird mit einem Pfeil dargestellt. Können alle Kanten in beide Richtungen durchlaufen werden, so bezeichnet man den Graphen als **ungerichtet**.
- Führt zu einem Knoten keine Kante, zum Beispiel zu F, dann nennt man diesen Knoten **isoliert**.
- Sind alle Knoten in einem Graphen durch Kanten verbunden, so bezeichnet man den Graphen als **zusammenhängend**, andernfalls als **nicht zusammenhängend**.

Graphentheorie

- Liegt ein Graph vor, der zusammenhängend und einfach ist und keine Zyklen enthält, spricht man von einem **Baum**.
  Oft sollen Kanten eingespart werden, um zum Beispiel Kosten zu sparen. Dazu wird ein Ersatzgraph gesucht, der zwar noch immer alle Knoten, aber nicht mehr alle Kanten enthält. Man nennt so einen Ersatzgraphen einen **spannenden Baum**. Für den Graphen aus Abb. 7.1 kann zum Beispiel der spannende Baum in Abb. 7.2 angegeben werden.

Abb. 7.1

Abb. 7.2

Die Zusammenhänge zwischen Knoten und Kanten lassen sich mithilfe einer so genannten **Adjazenzmatrix** oder **Nachbarschaftsmatrix** darstellen. Eine solche Matrix wird beim Programmieren von Graphen verwendet. Dabei entspricht die Anzahl der Knoten der Anzahl der Zeilen und der Spalten der quadratischen Matrix. Die Elemente der Matrix sind die jeweilige Anzahl der Kanten zwischen den Knoten.

- Enthält der Graph eine **ungerichtete Schlinge**, wird **2** in die Matrix eingetragen.
- Bei einer **gerichteten Schlinge** wird **1** eingetragen.
- Ist die **Kante gerichtet**, wird in Pfeilrichtung **1** eingetragen, in die andere Richtung **0**.

von \ nach	A	B	C	D
A	**2**	1	0	1
B	1	**1**	**2**	0
C	0	**2**	0	**1**
D	1	0	**0**	0

Für eine Adjazenzmatrix gilt:

- Sie enthält alle wichtigen Informationen über einen Graphen, wie zum Beispiel die Anzahl der Kanten zwischen zwei Knoten, die Anzahl der Schlingen usw.
- Handelt es sich bei dem Graphen um einen ungerichteten Graphen, dann ist die Matrix symmetrisch.

ACD **7.2** ***1)*** Erkläre, warum es sich beim abgebildeten Graphen um einen einfachen Graphen handelt.
2) Bestimme die Knotengrade.
3) Gib einen möglichen Zyklus an.
4) Stelle die Adjazenzmatrix für den dargestellten Graphen auf.

Lösung:
1) Der Graph ist einfach, da er keine Mehrfachkanten oder Schlingen enthält.
2) Knotengrade: A: 1, B: 2, C: 4, D: 3, E: 2
3) Mögliche Zyklen sind zum Beispiel C-B-D-C oder C-E-D-C.
4) Adjazenzmatrix:

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	0	0
B	0	0	1	1	0
C	1	1	0	1	1
D	0	1	1	0	1
E	0	0	1	1	0

7.3 1) Bestimme den Knotengrad der einzelnen Knoten.
2) Gib an, ob es sich um einen einfachen Graphen handelt.
3) Stelle die Adjazenzmatrix auf.

a) b) c)

ACD

7.4 Zeichne einen Graphen, zu dem die angegebene Adjazenzmatrix passt.

ABC

a)

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	1	0
D	0	1	1	0	1
E	0	0	0	1	0

b)

	A	B	C	D	E
A	0	1	2	1	0
B	1	2	0	0	1
C	2	0	1	0	1
D	1	0	0	0	0
E	0	1	1	1	0

7.5 Gib an, welcher der abgebildeten Graphen ein Baum ist. Begründe deine Antwort.

CD

1) 2) 3)

7.6 Stelle die Adjazenzmatrix des dargestellten Graphen auf. Gib einen möglichen Zyklus an. Zeichne einen spannenden Baum.

ABC

a) b)

7.7 Erstelle anhand der Abbildung einen Graphen für die Wasserwege zwischen den Orten Würzburg – Fürth – Nürnberg – Regensburg – Ingolstadt – Augsburg – München.
Erkläre, ob es sich um einen zusammenhängenden Graphen handelt.

AD

7.8 Zeichne einen möglichen Graphen für die Autobahnverbindungen zwischen den Städten: Wien – Eisenstadt – Bratislava – Linz – Salzburg – Graz – Klagenfurt
Entnimm die dazu benötigten Informationen aus einer Karte.

AC

7.9 Erkläre, für welchen Graphen ein Eulerweg angegeben werden kann. Gib diesen gegebenenfalls an.

1) 2) 3)

AD

7.2 Gewichtete Graphen

Um in einem Graphen besondere Informationen, wie zum Beispiel tatsächliche Entfernungen oder Kosten anzugeben, werden die Kanten eines Graphen mit Zahlenwerten versehen. Diese Zahlenwerte werden **Längen** oder **Gewichte** genannt. Man spricht in diesem Fall von einem **gewichteten Graphen** oder einem **Netz**.

Sucht man nach einem spannenden Baum, bei dem das Netz insgesamt ein möglichst geringes Gesamtgewicht aufweist, so bezeichnet man diesen als **minimal spannenden Baum**, auch **Minimalnetz** genannt. Bei der Planung von Zug- oder Fluglinien spielt die Suche nach einem solchen minimal spannenden Baum eine wichtige Rolle. Um ein Minimalnetz zu finden, kann der **Algorithmus von Kruskal** verwendet werden, der von Joseph Bernard Kruskal (amerikanischer Mathematiker und Statistiker, 1928 – 2010) entwickelt wurde. Das Prinzip dieses Algorithmus soll nun anhand eines Beispiels erläutert werden.

ZB: Es soll ein minimal spannender Baum für die Kosten in Geldeinheiten (GE) eines Wasserleitungsnetzes zwischen verschiedenen Orten gefunden werden.

- Die Kanten werden nach ansteigendem Gewicht sortiert und in einer Tabelle notiert.

Gewicht	Kante	verwendet
3	CD	✓
4	AB	✓
4	BE	✓
5	BC	✓
5	AD	✗
6	DE	✗
8	AC	✗

- Als Start für den minimal spannenden Baum wählt man die Kante mit dem geringsten Gewicht, hier CD.
- Die jeweils nächste Kante wird hinzugefügt, solange dadurch kein Zyklus entsteht. Als nächste Kanten wählt man daher dem Gewicht entsprechend die Kanten AB und BE.
- Als letzte Kante wird zum Beispiel BC hinzugefügt. Jede weitere Kante würde einen Zyklus erzeugen. Somit ist ein minimal spannender Baum gefunden. Anstelle von BC hätte man auch AD wählen können und somit einen anderen, gleichwertigen minimal spannenden Baum erhalten.

3 + 4 + 4 + 5 = 16 GE

- Zur Berechnung der Gesamtkosten werden die einzelnen Kosten aufsummiert. Diese Summe wird **Minimalgewicht** genannt.

Algorithmus von Kruskal
Dieser Algorithmus wird verwendet, um einen minimal spannenden Baum zu finden.
- Ordnen der Kanten nach ihrem Gewicht;
  Startkante = Kante mit dem geringsten Gewicht
- Kanten, durch die kein Zyklus entsteht, werden der Reihe nach zum Graphen hinzugefügt.

Viele praktische Anwendungen lassen sich darauf zurückführen, den kürzesten Weg zwischen zwei Knoten zu finden, zum Beispiel das Finden des kürzesten oder schnellsten Wegs mithilfe eines Navigationsgeräts oder die geringsten Kosten eines Produktionsprozesses.

Dabei wird der nach Edsger W. Dijkstra (niederländischer Informatiker, 1930 – 2002) benannte **Algorithmus von Dijkstra** verwendet.

ZB: Im abgebildeten Graphen soll der kürzeste Weg von A nach G gefunden werden (Angaben in km).

- Man beginnt beim Startknoten **A** und gibt diesem den Wert **0**. Die Menge der von A erreichbaren Knoten ist {**B**, **C**}. Man bestimmt zu jedem dieser Punkte die Gesamtweglänge von A und notiert die Werte in Klammern.
- Der von A aus kürzeste Weg führt nach B. Er wird blau markiert und der Wert **3** fixiert. Von den Enden des bisher markierten Teilgraphen {**A**, **B**} sind {**C**, **D**, **E**} erreichbar. Die Gesamtweglängen von A aus zu diesen Punkten werden ermittelt.
- Der kürzeste Weg von A führt nach **C**, daher wird diese Kante blau markiert und der Wert **4** fixiert. Die Menge {**A**, **B**, **C**} wird um die erreichbaren Knoten {**D**, **E**, **F**} erweitert und die Entfernungen von A eingetragen.
- Das Verfahren wird in gleicher Weise bis G fortgesetzt.
- Man erkennt, dass die kürzesten Wege von A aus über D und E führen.
- Auf diese Weise erhält man die kürzesten Wege von A zu allen anderen Knoten und damit einen **minimal spannenden Baum**.
  Um den kürzesten Weg von A nach G zu ermitteln, muss der Weg von G nach A zurückgegangen werden. Jener Weg, der zu A zurückführt, wird durch Subtrahieren der Kantengewichte ermittelt. Daraus ergibt sich der kürzeste Weg: A-B-D-E-G mit der Länge 10 km.

Algorithmus von Dijkstra
Dieser Algorithmus wird verwendet, um einen kürzesten Weg, die minimalen Kosten usw. zu ermitteln. Von einem Startknoten aus werden die einzelnen Knoten und ihre zugehörigen Kanten der Reihe nach untersucht und die mit der geringsten Gesamtgewichtung ausgewählt, bis man beim gewünschten Zielknoten angelangt ist.

Graphentheorie

ABCD **7.10** Im folgenden Graphen ist ein Straßennetz zwischen sechs Orten dargestellt. Die Kantengewichte geben die Entfernungen in km an.

1) Erkläre, warum es möglich ist, einige Straßenverbindungen einzusparen und trotzdem alle Orte zu erreichen.

2) Ermittle einen Ersatzgraphen mit einer möglichst geringen Gesamtlänge. Gib diese Länge an.

ABC **7.11** Im Graphen ist der mögliche Verlauf von Netzkabeln zu PC-Anschlüssen in einem Großraumbüro dargestellt. Die Kantengewichte geben die Kosten für die Verlegung in Euro an.

1) Ermittle einen minimal spannenden Baum für das dargestellte Netzwerk.

2) Berechne die minimalen Kosten für das Netzwerk.

ABC **7.12** Der Graph zeigt das Netz von Wanderwegen in einem Erholungsgebiet. Die Gewichte geben die jeweilige Länge der Wanderwege zwischen den Knoten in Kilometer an.

1) Ermittle einen minimal spannenden Baum.

2) Bestimme den kürzesten Weg von A nach H mithilfe des Algorithmus von Dijkstra.

3) Gib die Länge für diesen Weg an.

ABC **7.13** Der Graph zeigt einen Ausschnitt eines Straßennetzes einer Stadt. Die Angaben sind in Minuten. Ein Fahrradbote möchte auf schnellstem Weg von A nach G fahren.

1) Ermittle den schnellsten Weg für den Fahrradboten.

2) Gib die Dauer des in ***1)*** ermittelten Wegs an.

ABC **7.14** Die Tabelle gibt die Entfernungen in km zwischen fünf Städten an.

1) Zeichne einen geeigneten Graphen.

2) Ermittle einen minimal spannenden Baum.

3) Berechne die Gesamtlänge des minimal spannenden Baums.

	A	B	C	D	E
A	–	14	22	21	18
B	14	–	19	21	20
C	22	19	–	21	15
D	21	21	21	–	24
E	18	20	15	24	–

ABC **7.15** Alexander verbringt eine Städtereise in London. Er möchte nur mit U-Bahn Linien von der Station Notting Hill Gate bis Leicester Square fahren. Er hat nur ein Ticket, das für die Zone 1 gültig ist.

1) Suche im Internet einen Plan der Londoner U-Bahn und recherchiere 5 mögliche Verbindungen zwischen diesen beiden Stationen, wenn Alexander nur einmal umsteigen möchte.

2) Zeichne einen Graphen für die Verbindungen aus ***1)***.

3) Ermittle die reinen Fahrzeiten zwischen den einzelnen Knoten. Die Umsteigezeiten können vernachlässigt werden.

4) Ermittle den schnellsten Weg für Alexander.

7.3 Netzpläne

Für die Planung und Steuerung von Projekten, wie zum Beispiel Bauvorhaben oder einzelnen Prozessen, werden **Netzpläne** verwendet, um den Ablauf der einzelnen dafür erforderlichen Schritte zeitlich zu gliedern und Zeit und Ressourcen zu sparen. Dabei werden die einzelnen Arbeitsabläufe mithilfe von einfachen, gerichteten und gewichteten Graphen dargestellt. Der Netzplan hilft, den Überblick über den Projektverlauf zu bewahren. Dabei gilt, dass jeder Knoten durchlaufen werden muss. Voneinander unabhängige Vorgänge können auch parallel ablaufen.

Wichtige Grundbegriffe in einem Netzplan:

- Unter einem **Projekt** versteht man das Gesamtvorhaben, welches durch einen Netzplan erfasst wird.
- Jede Kante im Graphen ist als Pfeil dargestellt und repräsentiert einen **Vorgang**. Darunter versteht man eine Aktivität bzw. eine Handlung von einer bestimmten Dauer.
- Die Knoten des Graphen entsprechen den **Ereignissen**, also dem Eintreten eines bestimmten Zustands im zeitlichen Ablauf und damit dem Anfangs- bzw. Endzeitpunkt eines Vorgangs.
- Zeitlich unmittelbar vorausgehende Arbeitsschritte werden als **Vorläufer** bezeichnet. Ein neuer Arbeitsschritt kann erst beginnen, wenn alle Vorgänge, die auf seinen Anfangspunkt führen, beendet sind.
- Der zeitlängste Weg in dem Graphen wird als **kritischer Weg** bezeichnet. Er gibt die Gesamtdauer des Projekts an, die man mindestens einplanen muss, damit es durchgeführt werden kann. Die Vorgänge auf diesem Weg werden **kritische Vorgänge** bezeichnet. Möchte man die Gesamtdauer des Projekts verkürzen, muss die Dauer der einzelnen Arbeitsschritte verkürzt werden.

ZB: Die Arbeitsabläufe eines Prozesses und deren Dauer sind in der folgenden Tabelle dargestellt. Der kritische Weg soll ermittelt werden.

Vorgang	Zeit in Tagen	Vorläufer
A	3	–
B	2	A
C	4	A
D	3	A
E	3	B, C
F	2	C, D
G	1	D, E, F

- Zuerst wird entsprechend der Tabelle ein gerichteter Graph erstellt. Die gerichteten Kanten beschreiben die Vorgänge. Diese werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Die Dauer eines Vorgangs wird in Klammern angegeben. Man beginnt mit jenem Vorgang, der keinen unmittelbaren Vorläufer hat.
- Zur Ermittlung des kritischen Wegs werden der Reihe nach alle möglichen Wege von 1 bis 8 angegeben und deren Länge berechnet.

$1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8$: $3 + 2 + 3 + 1 = 9$
$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 8$: $\mathbf{3 + 4 + 3 + 1 = 11}$
$1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8$: $3 + 4 + 2 + 1 = 10$
$1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 8$: $3 + 3 + 2 + 1 = 9$
$1 \to 4 \to 7 \to 8$: $3 + 3 + 1 = 7$

111Das Projekt dauert mindestens 11 Tage.

Bemerkung: Verzögert sich ein Arbeitsschritt entlang des kritischen Wegs, hat das jedenfalls Auswirkung auf die Gesamtdauer des Projekts. Bei allen anderen Wegen kann es Spielraum für Verzögerungen geben. Die Berechnung und Beobachtung des kritischen Wegs während eines Projekts ist daher wichtig, um rechtzeitig notwendige Umplanungen vornehmen zu können.

ABC **7.16** Lasagne soll zubereitet werden. Die dazu erforderlichen Schritte sind in der Tabelle aufgelistet.

1) Erstelle einen Netzplan für den gesamten Ablauf des Kochvorgangs.

2) Ermittle den kritischen Weg.

	Vorgang	Dauer	Vorläufer
A	Herdplatte 1 aufheizen	1 min	–
B	Herdplatte 2 aufheizen	1 min	–
C	Backrohr vorheizen	10 min	–
D	Béchamelsauce kochen	5 min	A
E	Fleischsauce kochen	10 min	B
F	Béchamelsauce vom Herd nehmen	0,5 min	D
G	Fleischsauce würzen	1 min	E
H	Zutaten gemeinsam mit Lasagneblättern in die Auflaufform schichten	12 min	F, G
I	Lasagne backen	30 min	H, C
J	Lasagne abkühlen	10 min	I

ABC **7.17** Ein Zimmer soll ausgemalt werden.

1) Erstelle einen Netzplan für den gesamten Ablauf und stelle diesen grafisch dar.

2) Ermittle den kritischen Weg.

	Vorgang	Dauer	Vorläufer
A	Farbe kaufen	1 h	–
B	Möbel ausräumen	2 h	A
C	Fenster abkleben	0,5 h	B
D	Boden abdecken	0,5 h	B
E	Wände abscheren	3 h	C, D
F	Löcher verspachteln	4 h	D, E
G	Decke streichen	1,5 h	E, F
H	Wand streichen	3 h	F, G
I	trocknen	6 h	G, H
J	Raum reinigen	1 h	I
K	Möbel einräumen	2 h	J

Zusammenfassung

Ein **Graph** besteht aus einer bestimmten Anzahl von **Knoten** und **Kanten**.

Eulerweg: Jede Kante eines Graphen wird genau einmal durchlaufen.
Offener Eulerweg: Es gibt genau zwei Knoten mit ungeradem Knotengrad (Start- und Endpunkt).

Geschlossener Eulerweg (Eulerkreis): Alle Knoten haben einen geraden Knotengrad.

Algorithmus von Kruskal: Ermittlung eines minimal spannenden Baums

Algorithmus von Dijkstra: Ermittlung des kürzesten Wegs zwischen zwei Knoten

Netzpläne werden verwendet, um die einzelnen Arbeitsschritte eines Projekts und deren Dauer zu ermitteln.

Weitere Aufgaben

7.18 Stelle für den abgebildeten Graphen eine Adjazenzmatrix auf. Zeichne einen minimal spannenden Baum für diesen Graphen.

7.19 Das dargestellte Netz stellt die Hauptstraßenverbindungen zwischen Städten dar. Die Gewichte auf den Kanten geben die Entfernungen in Kilometern an und die Knoten kennzeichnen Kreuzungen. Thomas arbeitet in der Stadt A und lebt in der Stadt F.
Ermittle den kürzesten Heimweg für Thomas mithilfe des Algorithmus von Dijkstra.

Aufgaben in englischer Sprache

algorithm	Algorithmus	minimum spanning tree	minimal spannender Baum
critical path	kritischer Weg	network	Netz
edge	Kante	vertex	Knoten

7.20 Use Dijkstra's algorithm to find the shortest distance from A to F in this network and state the route used (lengths in miles). Calculate the length of the shortest distance.

7.21 Use the algorithm of Kruskal to find a minimum spanning tree. Calculate its total length (lengths in miles).

7.22 The graph shows an activity network for a project. The figures in brackets represent the time in days to complete each activity. The start vertex is S and the terminal vertex is T. Give the length of the critical path.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ein einfacher Graph ist ein Graph ohne ... und ohne ...	
2	Ein Graph hat einen offenen Eulerweg, wenn ...	
3	Ich kann den Algorithmus von Dijkstra erklären und einen kürzesten Weg von A nach F ermitteln.	
4	Ich kann erklären, wofür der Algorithmus von Kruskal benötigt wird.	

Lösung:
1) Mehrfachkanten ... Schlingen. 2) ... es genau zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt. 3) siehe Seite 161. ZB: A-D-F.
4) siehe Seite 160.

8 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Inspiriert von seinem Freund Chevalier de Méré (französischer Adeliger und Glücksspieler, 1607 – 1684) beschäftigte sich Blaise Pascal (französischer Mathematiker, 1623 – 1662) mit den Gewinnchancen beim Glücksspiel. Obwohl de Méré über die Wahrscheinlichkeiten beim Würfelspiel Bescheid wusste, gab es aus seiner Sicht Widersprüche. Pascal tauschte sich brieflich mit Pierre Fermat (französischer Mathematiker, 1607 – 1665) aus und sie legten so den Grundstein für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Weitere wichtige Beiträge lieferten in Folge Jakob Bernoulli (schweizer Mathematiker, 1655 – 1705) und Pierre-Simon de Laplace (französischer Mathematiker, 1749 – 1827).
Zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten muss oft die mögliche Anzahl der Ausgänge eines Versuchs berechnet werden.

8.1 Kombinatorik

8.1.1 Grundbegriffe

D **8.1** In einem Geschäft gibt es zu einem Fahrradmodell in zwei Ausführungen vier spezielle Sättel. Erkläre, wie viele verschiedene Zusammenstellungen man bilden kann.

Die **Kombinatorik** (latein: „combinatio" = Vereinigung) befasst sich mit der Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten bei Anordnungs- bzw. Auswahlaufgaben. Da es im Allgemeinen zu aufwändig wäre, alle Möglichkeiten aufzuzählen, wurden zur Berechnung so genannte Abzähltechniken entwickelt.

ZB: Bei einem Computerspiel soll man einen von 3 verschiedenfärbigen Kreisen mit einem von 2 verschiedenfärbigen Quadraten kombinieren. Zusätzlich muss einer von 2 weiteren Kreisen mit einem Dreieck kombiniert werden.
Um einen Kreis mit einem Quadrat zu kombinieren, gibt es $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten:

●●● ■■ } ⇒ ●■ ●■ ●■ ●■ ●■ ●■

Um einen Kreis mit dem Dreieck zu kombinieren, gibt es $2 \cdot 1 = 2$ Möglichkeiten:

●● ▲ } ⇒ ●▲ ●▲

Die Anzahl aller Zweierkombinationen beträgt somit $6 + 2 = 8$.
Anhand des Beispiels erkennt man, dass die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten durch Multiplikation bestimmt wird; voneinander unabhängige Kombinationen werden addiert.

Ein häufig eingesetztes Hilfsmittel zur Veranschaulichung ist ein nicht einsehbares Gefäß, aus dem im Allgemeinen Kugeln gezogen werden. Aus historischen Gründen hat sich als Bezeichnung für dieses Gefäß der Name „Urne" eingebürgert. So entspricht dem Würfeln mit einem sechsseitigen Würfel das Ziehen von sechs nummerierten Kugeln aus einer Urne.

Aus der **Grundgesamtheit** von n Kugeln in einer Urne wird eine **Stichprobe** von k Kugeln entnommen. Dabei werden folgende Unterscheidungen getroffen:

- **Ziehen ohne Zurücklegen** (**Ziehen ohne Wiederholung**)
  Eine bereits gezogene Kugel kann nicht noch einmal gezogen werden.
- **Ziehen mit Zurücklegen** (**Ziehen mit Wiederholung**)
  Da zurückgelegt wird, kann dieselbe Kugel mehrmals gezogen werden.
- Ist die **Reihenfolge**, in der die Kugeln gezogen werden, **von Bedeutung**, handelt es sich um eine **geordnete Stichprobe**, **anderenfalls** um eine **ungeordnete Stichprobe**.

8.1.2 Permutationen (Anordnungen)

Eine Anordnung von n Elementen nennt man eine **Permutation** (latein: „permutare" = vertauschen).

Möchte man zum Beispiel drei verschiedenfärbige Kugeln (eine gelbe, eine rote und eine blaue) anordnen, so hat man folgende Möglichkeiten:

Für den 1. Platz hat man drei und für den 2. Platz noch zwei Farben zur Wahl. Für den letzten Platz bleibt nur noch eine Farbe übrig. Es gibt also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Anstelle von $3 \cdot 2 \cdot 1$ kann man auch 3! schreiben [sprich: „3 **Faktorielle**" oder „3 **Fakultät**"].

Allgemein kann man die Anzahl der Möglichkeiten, n **verschiedene** Elemente unterschiedlich anzuordnen, mit $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ berechnen. In diesem Fall spricht man von einer **Permutation ohne Wiederholung**.

Sind nicht alle Elemente voneinander unterscheidbar, so spricht man von einer **Permutation mit Wiederholung**. Werden nicht unterscheidbare Elemente verwendet, so erhält man durch deren Vertauschen keine neue Anordnung.
Wird im obigen Beispiel eine rote Kugel durch eine weitere gelbe Kugel ersetzt, so erhält man:

Je zwei der abgebildeten Fälle stellen die gleiche Anordnung dar. Es entfallen daher jeweils jene 2! Möglichkeiten, die dem Vertauschen der gelben Kugeln entsprechen.
Es müssen also die ursprünglich 3! Möglichkeiten durch 2! dividiert werden:

$\frac{3!}{2!} = 3$ Möglichkeiten

Die **Faktorielle n!** ist definiert als:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

Es gilt: $0! = 1$ und $1! = 1$

Anzahl der **Permutationen von n Elementen**
ohne Wiederholung: $P = n!$
n voneinander **unterscheidbare Elemente** kann man auf n! verschiedene Arten anordnen.

mit Wiederholung: $P_W = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t! \cdot \ldots}$
n Elemente, von denen **r, s, t, ...** Elemente **jeweils gleich** sind, werden angeordnet.

8.2 Wie viele Anagramme können aus den Worten ***1)*** DONAU und ***2)*** ATTERSEE gebildet werden?

AB

Lösung:

1) $n = 5$ ● Jeder Buchstaben kommt nur einmal vor.
$P = 5! = 120$
Es gibt 120 Anagramme des Worts DONAU.

2) $n = 8$, T ... 2, E ... 3 ● Zwei Buchstaben kommen mehrfach vor.
$P_W = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3\,360$
Es gibt 3 360 Anagramme des Worts ATTERSEE.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Permutationen ohne Wiederholung

B **8.3** Eine Pharmareferentin will neun Kundengespräche führen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind möglich?

B **8.4** Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es in einer Klasse mit 20 Schülerinnen und Schülern und 20 Plätzen? Berechne, wie viele Jahre es dauern würde, jede Sitzordnung einzunehmen, wenn jeden Tag eine andere Sitzordnung gewählt wird.

BC **8.5** Berechne, auf wie viele Arten fünf Personen in einem Auto mit insgesamt fünf Sitzplätzen Platz nehmen können, wenn nur eine Person einen Führerschein hat. Dokumentiere deine Überlegungen.

Permutationen mit Wiederholung

AB **8.6** Wie viele Anagramme kann man aus den Buchstaben A, B, B und A bilden?
1) Schreibe alle Möglichkeiten an. **2)** Überprüfe die Anzahl anschließend mit der Formel.

B **8.7** Berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt, 6 weiße, 3 gelbe und 5 schwarze Kugeln anzuordnen.

BD **8.8** Wie viele verschiedene Sitzplatzanordnungen gibt es in einer Klasse mit 30 Schülerinnen und Schülern bei 36 Plätzen? Erkläre, warum diese Situation als Permutation mit Wiederholung interpretiert werden kann.

BC **8.9** Christiaan Huygens (niederländischer Astronom, 1629 – 1695) veröffentlichte zur Beschreibung des Saturns (in lateinischer Sprache) folgendes Anagramm:
AAAAAAA CCCCC D EEEEE G H IIIIIII LLLL MM
NNNNNNNNN OOOO PP Q RR S TTTTT UUUUU
1) Wie viele weitere Anagramme kann man bilden?
2) Recherchiere den tatsächlichen Wortlaut der Beschreibung.

Vermischte Aufgaben

AB **8.10** In einer Bonbonniere befinden sich vier gleiche Nougatpralinen und vier gleiche Nusspralinen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Pralinen anzuordnen?

AB **8.11** Drei Paare sollen gemeinsam fotografiert werden. Wie viele Anordnungen gibt es,
a) wenn sich die sechs Personen beliebig nebeneinander aufstellen?
b) wenn der jeweils größere Partner hinten steht?
c) wenn sie paarweise nebeneinander stehen?

AB **8.12** Je eine 1-Euro-, 50-Cent- und 20-Cent-Münze aus Österreich, Irland und Finnland aus dem Jahre 2015 liegen auf dem Tisch. Berechne, wie viele verschiedene Anordnungen man bilden kann, wenn immer das Bild sichtbar ist.

AB **8.13** Im Laufe der Geschichte wurden die Regeln für das Schachspiel immer wieder geändert.
1) Berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt, die weißen Schachfiguren in den ersten beiden Reihen beliebig anzuordnen.
2) Bei der Eröffnungsstellung von Chess960 stehen die Bauern wie üblich in der zweiten Reihe. Die restlichen weißen Figuren stehen in der ersten Reihe. Ein Läufer muss auf weiß und der andere auf schwarz stehen, die Dame und die Springer können beliebig stehen. Der König kann beliebig zwischen den Türmen angeordnet werden. Die schwarzen Figuren werden symmetrisch zu den weißen Figuren aufgestellt. Berechne, wie viele Eröffnungsstellungen für Chess960 möglich sind.

8.1.3 Variation (Auswahl mit Berücksichtigung der Reihenfolge)

8.14 Anne, George, Julian, Richard und Tim gehen ins Theater. Auf wie viele Arten können sie in einer Loge mit 8 Sitzen Platz nehmen? AB

Bei der **Variation** wählt man aus einer Grundmenge mit n verschiedenen Elementen k Elemente aus. Dabei ist die **Reihenfolge** der Auswahl **von Bedeutung**. Man erhält eine geordnete Stichprobe.

Variation ohne Wiederholung
Kann jedes Element nur einmal ausgewählt werden, erhält man eine geordnete Stichprobe mit k verschiedenen Elementen. Man spricht von einer **Variation ohne Wiederholung**.

ZB: In einer Urne befinden sich folgende Kugeln:
Vier Kugeln sollen gezogen und auf eine Kette aufgefädelt werden. Es wird berechnet, wie viele verschiedene Farbfolgen entstehen können.
Beim 1. Zug stehen 6 Kugeln zur Verfügung, beim 2. Zug stehen 5 Kugeln zur Verfügung, usw.
Insgesamt gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten.
Um diesen Ausdruck mithilfe der Fakultät anschreiben zu können, wird erweitert:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \mathbf{2 \cdot 1}}{\mathbf{2 \cdot 1}} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

Allgemein: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Anzahl der **Variationen ohne Wiederholung**

$$V = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Aus **n verschiedenen Elementen** werden **k verschiedene Elemente** ausgewählt. Die **Reihenfolge** der Auswahl ist dabei **von Bedeutung**.

Bemerkung: Die Berechnung wird bei vielen Taschenrechnern mithilfe des Befehls „nPr“ (englisch: „n permutation r“) durchgeführt. Im englischen Sprachraum wird nicht zwischen Variation und Permutation unterschieden.

8.15 Berechne die Anzahl der möglichen Anordnungen von 3 Kugeln, die aus einer Urne mit 7 verschiedenen Kugeln gezogen werden. B TE

Lösung mit TI-Nspire:

```
1.1    *Nicht gespeicherte
nPr(7,3)                210
```

- Der Befehl **nPr()** befindet sich im Menü **5: Wahrscheinlichkeit**, **2: Permutationen**.

Es gibt 210 Möglichkeiten.

Variation mit Wiederholung
Können Elemente mehrfach ausgewählt werden (Ziehen mit Zurücklegen), so spricht man von einer **Variation mit Wiederholung**.

ZB: In einer Urne befinden sich folgende Kugeln:
Eine Kugel wird gezogen und die Farbe notiert. Anschließend wird die Kugel in die Urne zurück gelegt. Dieser Vorgang wird viermal wiederholt. Es wird berechnet, wie viele verschiedene Farbfolgen entstehen können.
Beim 1. Zug hat man 6 Kugeln zur Verfügung, ebenso bei allen weiteren Zügen.
Insgesamt kann man also $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1\,296$ Farbfolgen bilden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Anzahl der **Variationen mit Wiederholung**

$V_W = n^k$

Aus **n verschiedenen Elementen** werden **k Elemente** gezogen. **Jedes Element** steht **bei jedem Zug wieder zur Verfügung**. Die **Reihenfolge** ist **von Bedeutung**.

B **8.16** Wie viele verschiedene Zahlenfolgen können durch zweimaliges Würfeln entstehen?
Lösung:
$n = 6$ und $k = 2 \Rightarrow V_W = 6^2 = 36$
Man kann 36 verschiedene Würfe machen.

- Aus 6 Möglichkeiten wird 2-mal ausgewählt.

Variation ohne Wiederholung

B **8.17** Wie viele Möglichkeiten gibt es für drei Personen, auf zehn Sesseln Platz zu nehmen?

B **8.18** Wie viele dreiziffrige Zahlen kann man aus den Ziffern 2, 3, 4, 5 und 6 bilden, wenn in der Zahl jede Ziffer nur einmal vorkommen darf?

D **8.19** Begründe, warum im englischsprachigen Raum lediglich der Begriff „permutation" für die Begriffe „Permutation" und „Variation" verwendet wird.

Variation mit Wiederholung

B **8.20** Beim Lotto „6 aus 45" kann man auch den „Joker" spielen. Für die 6 Stellen des Jokers werden jeweils Ziffern aus 0 bis 9 gezogen. Gib an, wie viele Jokerzahlen möglich sind.

AB **8.21** Wie viele vierstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 3, 2, 1, 0 bilden, wenn jede Ziffer beliebig oft verwendet werden darf?

B **8.22** Auf einem Totoschein kann für 13 Spiele 1, 2 oder x angekreuzt werden. Berechne, wie viele Tipps ausgefüllt werden müssen, damit sich darunter der richtige Tipp befindet.

Vermischte Aufgaben

AB **8.23** Beim Elfmeterschießen wählt der Trainer fünf Spieler in einer bestimmten Reihenfolge aus einer Mannschaft von elf Spielern aus. Wie viele Möglichkeiten hat er,
1) wenn er den Torwart berücksichtigt?
2) wenn er den Torwart nicht berücksichtigt und nur noch neun Feldspieler zur Verfügung stehen?

AB **8.24** Zwanzig der am Aufbau der Proteine beteiligten Aminosäuren werden durch eine Sequenz – ein so genanntes Codon – aus drei der vier Nucleinbasen (Adenin, Cytosin, Guanin, Uracil) codiert. Dabei kann jede Nucleinbase mehrmals in einem Codon vorkommen. Wie viele Codone können insgesamt gebildet werden?

AB **8.25** Ein Passwort soll aus zehn Zeichen (Ziffern oder Buchstaben) bestehen. Jeder Buchstabe und jede Ziffer darf mehrmals verwendet werden. Es wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden. Wie viele Passwörter kann man jeweils kreieren?

AB **8.26** Ein Kennwort soll aus 12 Zeichen bestehen. Jeder Buchstabe und jede Ziffer darf mehrmals verwendet werden, wobei zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden wird. Wie viele Kennwörter kann man bilden?

AB **8.27** Susanne möchte für ihr 16-stelliges Passwort als erstes Zeichen einen Großbuchstaben wählen, als zweites Zeichen einen Kleinbuchstaben und für die weiteren Zeichen nur mehr Ziffern. Wie viele Passwörter sind möglich, wenn es keine weiteren Einschränkungen gibt?

8.1.4 Kombination (Auswahl)

8.28 In einem Betrieb arbeiten elf Personen. Die Unternehmensleitung wählt drei Personen für eine Fortbildungsveranstaltung aus. Wie viele mögliche Dreiergruppen gibt es?

AB

Bei der **Kombination** wählt man aus n verschiedenen Elementen k Elemente aus, wobei die **Reihenfolge nicht von Bedeutung** ist. Man erhält eine **ungeordnete Stichprobe**.

Kombinationen ohne Wiederholung
Kann jedes Element nur einmal ausgewählt werden, so spricht man von einer **Kombination ohne Wiederholung**.

ZB: In einer Urne befinden sich folgende Kugeln: ● ● ● ● ● ●
Drei Kugeln sollen gezogen werden, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommt. Wäre die Reihenfolge von Bedeutung, so gäbe es $\frac{6!}{(6-3)!}$ Möglichkeiten.
Da die Reihenfolge bedeutungslos ist, müssen alle Möglichkeiten, die durch Umordnung entstehen, als **eine** Möglichkeit gezählt werden. Handelt es sich zum Beispiel um eine gelbe, eine rote und eine blaue Kugel, sind folgende Permutationen möglich:

●●● ●●● ●●● ●●● ●●● ●●●

Diese 3! Anordnungen stellen nur eine Möglichkeit dar, wenn die Anordnung nicht berücksichtigt wird. Die mit der Formel der Variation berechnete Anzahl muss daher noch durch 3! dividiert werden.

$\frac{\frac{6!}{(6-3)!}}{3!} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20$ Farbkombinationen

Der Ausdruck $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(n-k)!}$ wird meist mit $\binom{n}{k}$ [sprich: „n über k"]

abgekürzt; ($n \geqslant k$ mit $n, k \in \mathbb{N}$). Dieser Ausdruck wird **Binomialkoeffizient** genannt.

Für das Beispiel gilt: $\binom{6}{3} = 20$

Anzahl der **Kombinationen ohne Wiederholung**

$C = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ $\binom{n}{k}$ ... Binomialkoeffizient **„n über k"**

Aus **n verschiedenen Elementen** werden **k verschiedene Elemente** ausgewählt. Die **Reihenfolge** der Auswahl ist **nicht von Bedeutung**.

Bemerkung: Viele Taschenrechner können mit dem „nCr"-Befehl (englisch: „n combination r") den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{r}$ berechnen.

8.29 In einer Lade befinden sich 6 Blu-rays. Es werden 2 davon blind gezogen. Berechne die Anzahl der möglichen Zweierkombinationen.

B

TE

Lösung mit TI-Nspire:

```
1.1   *Nicht gespeicherte
nCr(6,2)                    15
```

- Der Befehl **nCr()** befindet sich im Menü **5: Wahrscheinlichkeit**, **3: Kombination**.

Es sind 15 Kombinationen möglich.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kombinationen mit Wiederholung

Können Elemente mehrfach ausgewählt werden (Ziehen mit Zurücklegen), so spricht man von einer **Kombination mit Wiederholung**. Da sie in der Praxis selten verwendet wird, wird die Formel ohne Beweis angeführt.

Anzahl der **Kombinationen mit Wiederholung**

$$C_W = \binom{n+k-1}{k}$$

Aus **n verschiedenen Elementen** werden **k Elemente** ausgewählt. **Jedes Element** steht **bei jedem Zug wieder zur Verfügung**. Die **Reihenfolge** der Auswahl ist **nicht von Bedeutung**.

AB **8.30** Bei einem Test, zu dem einige hundert Studierende antreten wollen, werden jeweils drei von 100 Fragen pro Studierendem geprüft. Wie viele Studierende können maximal antreten, wenn der Prüfer ein und dieselbe Fragenkombination nicht doppelt geben will?

B **8.31** Ein „französisches Blatt" besteht aus 52 Spielkarten in den Farben „Treff", „Pik", „Herz" und „Karo". Jede Farbe gibt es in den Werten 2, 3, ..., 10, Bube, Dame, König, Ass. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten für „eine Hand" mit n Karten.

a) nur Karo, n = 5 **b)** nur Pik, n = 3 **c)** nur rot, n = 7

AB **8.32** In einer HTL-Klasse sind 30 Schülerinnen und Schüler. Wie viele Möglichkeiten gibt es, jeweils jemanden für die Aufgaben des „Tafelordners" und des „Klassenbuchordners" auszuwählen, wenn eine Person auch beide Aufgaben übernehmen kann?

B **8.33** Wie viele Produkte $d = a \cdot b \cdot c$ lassen sich aus den Zahlen 1 bis 9 bilden, wenn kein Faktor 2-mal verwendet werden darf?

B **8.34** Es sind sieben Punkte in der Ebene gegeben. Wie viele Geraden kann man durch jeweils zwei Punkte legen, wenn nie drei der Punkte auf einer Geraden liegen?

B **8.35** An einer Fortbildung zum Thema „Neue CNC-Maschinen" nehmen 7 Frauen und 13 Männer teil.

1) Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Team aus drei Personen auszuwählen?

2) In wie viel Prozent aller möglichen Teams sind nur Männer?

Überblick

Ziehen einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit
- nein → **Permutation (Anordnung)** → Elemente mehrfach vorhanden
  - nein: $n!$
  - ja: $\frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t! \cdot \ldots}$
- ja → Reihenfolge von Bedeutung
  - ja → **Variation (Auswahl + Anordnung)** → Ziehen mit Zurücklegen
    - nein: $\frac{n!}{(n-k)!}$
    - ja: n^k
  - nein → **Kombination (Auswahl)** → Ziehen mit Zurücklegen
    - nein: $\binom{n}{k}$
    - ja: $\binom{n+k-1}{k}$

Aufgaben 8.36 – 8.48: Manche Angaben können unterschiedlich interpretiert werden. Gib in diesen Fällen an, von welchen Voraussetzungen du ausgehst.

8.36 Gib jeweils an, ob es sich bei der Berechnung aller möglichen Versuchsausgänge, um eine Permutation, Variation oder Kombination mit oder ohne Wiederholung handelt und bestimme die Parameter. C

1) 24 Perlen, wobei je 8 die gleiche Farbe haben, werden auf eine Kette gefädelt.
2) Für einen Ring werden aus 18 verschiedenen Glasperlen 6 ausgewählt.
3) Es sollen Autonummern gebildet werden, die aus vier Ziffern (0, ..., 9) und einem Buchstaben (A, ..., Z) bestehen.
4) Aus einer Urne mit 20 nummerierten Kugeln werden mit einem Griff 3 Kugeln gezogen.

8.37 Berechne, wie viele verschiedene Tipps im deutschen Lotto „6 aus 49" möglich sind. AB

8.38 Gib an, wie viele verschiedene (auch physikalisch falsche) „Regenbogen" aus sieben Farben gezeichnet werden können. AB

8.39 Ein Rieseneisbecher wird mit 5 Waffeln und 4 Hohlhippen dekoriert. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die Waffeln und Hohlhippen in einer Reihe zu platzieren. AB

8.40 Berechne, wie viele Reihenfolgen möglich sind, wenn 15 Personen nacheinander einen Raum verlassen. AB

8.41 Zwölf Personen wollen mit einem Autobus fahren, der nur mehr fünf freie Plätze hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die fünf Plätze zu besetzen, wenn die verschiedenen Anordnungen der Personen ***1)*** berücksichtigt werden? ***2)*** nicht berücksichtigt werden? AB

8.42 Bruno, sechs Jahre alt, besitzt fünf Farbstifte: rot, blau, grün, gelb und violett. Er zeichnet eine Katze und wählt einen Stift für den Kopf, einen für den Körper, einen für die Beine und einen für den Schweif. Wie viele bunte Katzen kann Bruno zeichnen, wenn er ***1)*** die gleiche Farbe mehrfach verwendet? ***2)*** nur verschiedene Farben verwendet? AB

8.43 Erfinde eine passende Aufgabenstellung zu dem angegebenen Ausdruck. C

a) $7!$ ***b)*** 7^3 ***c)*** $\binom{7}{3}$ ***d)*** $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ***e)*** $\frac{7!}{3! \cdot 2!}$

8.44 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit 3 Kugeln zu ziehen, wird mit 81 angegeben. Gib eine passende Aufgabenstellung an. C

8.45 In einem Büro sind 18 Telefone vorhanden. Berechne, wie viele Verbindungen zwischen diesen Apparaten hergestellt werden können. AB

8.46 Um eine Maschine zu starten, müssen 10 Schalter richtig eingestellt werden. Ein Schalter kann 2 Positionen haben. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die Schalter falsch einzustellen. AB

8.47 Vier Frauen und vier Männer kommen an ein Drehkreuz, das sie nacheinander passieren. AB
1) Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind für diese Personen möglich?
2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Männer und Frauen abwechselnd gehen?
3) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn alle Frauen zuerst gehen?

8.48 Eine Spielgemeinschaft kreuzt alle möglichen Lottotipps bei Lotto „6 aus 45" an. Wie viele Fünfer mit bzw. ohne Zusatzzahl und wie viele Vierer erzielt sie damit? AB

8.1.5 Der binomische Lehrsatz

B **8.49** Gib die Formeln für $(a + b)^2$ und $(a + b)^3$ an.

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ wird als Binomialkoeffizient bezeichnet, weil er in der Formel für die Berechnung von Potenzen eines Binoms eine wichtige Rolle spielt. Berechnet man zum Beispiel
$\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1$ oder $\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1$, so erkennt man, dass es sich dabei um die Koeffizienten der Binome $(a + b)^2$ und $(a + b)^3$ handelt. Werden die Binomialkoeffizienten in Form eines Dreiecks angeordnet, erhält man das **Pascal'sche Dreieck**.

Blaise Pascal

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
ZB: $(a + b)^4 \ldots \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \ldots\ldots n = 4;\ k = 0, 1, \ldots, 4$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Mithilfe des Binomialkoeffizienten lässt sich die **binomische Reihe** anschreiben, die eine Formel für $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, angibt. Man nennt diese Formel den **binomischen Lehrsatz**.

Der binomische Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{mit } n, k \in \mathbb{N}$$

B **8.50** Schreibe die ersten fünf Zahlen der 18. Zeile des Pascal'schen Dreiecks an, wenn man mit der „nullten Zeile" zu zählen beginnt.

B **8.51** Schreibe die binomische Reihe an.
a) $(a + b)^5$ **b)** $(x - 1)^7$ **c)** $(2a - 5)^4$ **d)** $(y + 3)^6$

BC **8.52** Welche Zahl steht in der Mitte der 20. Zeile des Pascal'schen Dreiecks, wenn man mit der „nullten Zeile" zu zählen beginnt?

BC **8.53** Für welches n enthält $(a + b)^n$ einen Term der Form $c \cdot a^8 b^5$? Ermittle c.

BD **8.54** Überprüfe die Aussage für ein selbst gewähltes Beispiel und zeige allgemein.
a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ **b)** $\binom{n}{n} = 1$ **c)** $\binom{n}{1} = n$

BD **8.55** Zeige die Gültigkeit der Aussage $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Erkläre den Aufbau des Pascal'schen Dreiecks mithilfe dieser Formel.

BD **8.56** Es gilt: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

1) Überprüfe diese Aussage für n = 5.
2) Zeige die allgemeine Gültigkeit dieser Aussage.
Hinweis: Verwende den in Aufgabe **8.55** angegebenen Zusammenhang.

8.2 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die österreichische Lottoziehung vom 28. September 2003 lieferte nahezu dieselben Zahlen wie jene des Vorabends in Deutschland: „3, 17, 35, 39, 40, 44“ und „7, 17, 35, 39, 40, 44“ waren diesseits und jenseits der Grenze die Glückszahlen. Doch nicht eine seltene Planetenkonstellation – wie in manchen Printmedien vermutet wurde – war die Ursache, sondern lediglich der Zufall. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist jenes Teilgebiet der Mathematik, in dem scheinbar und tatsächlich zufällige Ereignisse mit den Methoden der Mathematik untersucht und beschrieben werden.

8.2.1 Grundbegriffe

8.57 Beim Schulball von Daniel gibt es 300 Tombolalose mit 20 Gewinnen, beim Schulball von Claudia sind es 500 Lose mit 40 Gewinnen. Bei welchem Schulball ist die Chance größer, beim Kauf von nur einem Los zu gewinnen? C

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

In der Mathematik ist es manchmal notwendig, Grundaussagen festzulegen, die nicht bewiesen werden können. Solche Aussagen nennt man **Axiome**. Die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigten Axiome wurden 1933 vom russischen Mathematiker Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 – 1987) im Buch „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ formuliert. Diese Axiome werden nun anhand von Beispielen erläutert.

Beim Würfeln sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Bei einem unverfälschten (fairen bzw. idealen) Würfel haben die Ergebnisse jeweils die gleiche Chance einzutreten. Das Experiment ist **beliebig oft wiederholbar** und die **Chancen** für die **möglichen Ausgänge** sind **jeweils gleich** und **verändern sich nicht**. Ein Versuch, der diese Forderungen erfüllt, heißt **Laplace-Experiment**.
Bei einem verfälschten Würfel sind die Chancen nicht für alle Ausgänge gleich. Das Würfeln mit diesem Würfel ist deshalb kein Laplace-Experiment, aber trotzdem ein Zufallsexperiment. Üblicherweise lassen sich viele Experimente auf ein Laplace-Experiment zurückführen.

Jeder mögliche Ausgang eines Zufallsexperiments wird **Ergebnis** bzw. **Elementarereignis** genannt. Eine Menge von Ergebnissen bildet ein **Ereignis**. Jene Ergebnisse, die von Interesse sind, werden als „günstige Fälle“ bezeichnet.
Die Wahrscheinlichkeit P (latein: „probabilitas“ = Wahrscheinlichkeit), dass bei der Ausführung eines Laplace-Experiments ein bestimmtes Ereignis E eintritt, wird folgendermaßen festgelegt:

Für ein **Laplace-Experiment** gilt: $P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$

Ein Ereignis kann ein oder mehrere Ergebnisse umfassen.
ZB: Beim Würfel gibt es sechs verschiedene Ergebnisse (1, 2, 3, 4, 5, 6).
Soll die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augenzahl 6“ untersucht werden, gibt es einen günstigen Fall (6): $P(\text{Augenzahl } 6) = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$.
Soll die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augenzahl gerade“ untersucht werden, gibt es drei günstige Fälle (2, 4, 6): $P(\text{Augenzahl gerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$
Weiters gilt:
- $P(E) = 1$: E ist ein sicheres Ereignis, zB: E … Augenzahl von 1 bis 6
- $P(E) = 0$: E ist ein unmögliches Ereignis, zB: E … Augenzahl 7

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alle Ergebnisse eines Experiments, die nicht zu einem bestimmten Ereignis E gehören, bilden das **Gegenereignis** „nicht E" von E. Die Wahrscheinlichkeit von „nicht E" ist die **Gegenwahrscheinlichkeit** des Ereignisses E: P(nicht E) = 1 – P(E)

ZB: P(nicht 6) = 1 – P(6) = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Axiome von Kolmogorow

$P(E) \geqslant 0$ Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine nichtnegative reelle Zahl.

$P(E) = 1$ Die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses ist 1.

P(A oder B) = P(A) + P(B), wenn A und B einander ausschließende Ereignisse sind.

Zusätzlich gilt:

P(nicht E) = 1 – P(E) „nicht E" … Gegenereignis von E

P(unmögliches Ereignis) = 0

Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff

In der modernen Mathematik hat sich neben dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff auch der **statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff** entwickelt. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mithilfe der relativen Häufigkeit definiert. Würfelt man zum Beispiel sehr oft mit einem fairen Würfel, so liegt der relative Anteil der Sechser bei rund $\frac{1}{6}$. Geht die Anzahl der Versuche gegen unendlich, so bezeichnet man den Grenzwert der relativen Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit.

zB:

n Würfe	x 6er	$\frac{x}{n}$
50	9	$\frac{9}{50} = 0{,}18$
100	17	$\frac{17}{100} = 0{,}17$
1 000	161	$\frac{161}{1\,000} = 0{,}161$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{6} = 0{,}166...$

B **8.58** In einer Urne liegen 5 rote, 6 weiße und 3 blaue Kugeln. Man wählt zufällig eine Kugel aus. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man

a) eine rote Kugel zieht. ***b)*** eine rote oder eine blaue Kugel zieht.

Lösung:

a) P(rot) … Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen ● $P(\text{rot}) = \frac{\text{Anzahl der roten Kugeln}}{\text{Gesamtzahl der Kugeln}}$

P(rot) = $\frac{5}{14} = 0{,}35714 \approx 35{,}7\,\%$

b) P(rot oder blau) = $\frac{8}{14} = 0{,}57143 \approx 57{,}1\,\%$ ● 8 Kugeln sind rot oder blau.

ABC **8.59** Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit zwei unverfälschten Würfeln folgende Augensumme zu erzielen. Beschreibe deine Überlegungen.

a) fünf ***b)*** mindestens neun ***c)*** höchstens vier ***d)*** höchstens zwölf ***e)*** 13

Lösung:

Beim Werfen mit zwei Würfeln kann man 36 verschiedene Ereignisse beobachten: (1,1), ..., (6,6)

a) P(Summe = 5) = $\frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 11{,}1\,\%$ — Die Augensumme fünf tritt 4-mal auf: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

b) P(Summe $\geqslant$ 9) = $\frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 27{,}8\,\%$ — Die Augensummen neun oder mehr erhält man mit: (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), ..., (5,6), (6,3), ..., (6,6)

c) P(Summe $\leqslant$ 4) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$ — Die Augensummen vier oder weniger erhält man mit: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)

d) P(Summe $\leqslant$ 12) = 1 = 100 % — Eine Augensumme von höchstens zwölf ist ein sicheres Ereignis.

e) P(Summe = 13) = 0 = 0 % — Eine Augensumme von 13 ist ein unmögliches Ereignis.

8.60 Berechne die Wahrscheinlichkeit, aus 20 französischen Schnapskarten (Abb 8.1 Seite 178) **1)** ein Ass zu ziehen. **2)** kein Ass zu ziehen. B

Lösung:

1) P(Ass) = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ = 20 %

2) P(kein Ass) = 1 – P(Ass) = $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ = 80 % ● Gegenwahrscheinlichkeit

oder

P(kein Ass) = $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ = 80 % ● Abzählen ergibt 16 günstige Fälle.

8.61 Von 100 Schrauben sind 12 defekt. Eine Schraube wird zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie **1)** defekt, **2)** nicht defekt ist. B

8.62 In einer Klasse sind 12 Schülerinnen und 15 Schüler. Da sich niemand meldet, wird per Los entschieden, wer die Klassenkasse übernimmt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kasse von **1)** einer Schülerin, **2)** einem Schüler übernommen wird? B

8.63 Eine Münze wird dreimal geworfen. Schreibe alle möglichen Ergebnisse auf. Berechne anschließend die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. B

1) Zahl, Zahl, Wappen in dieser Reihenfolge
2) zweimal Wappen, einmal Zahl in beliebiger Reihenfolge
3) dreimal Wappen
4) mindestens einmal Zahl

8.64 In einer Packung gibt es Schokoladestücke in vier Sorten: viermal Nuss, viermal Marzipan, viermal Kaffee und viermal Bitterschokolade. Du darfst ohne hinzusehen ein Stück wählen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es deinen Geschmack trifft, wenn du B

a) keine Bitterschokolade magst?
b) weder Marzipan noch Bitterschokolade gerne isst?
c) nur Nuss magst?
d) alles gerne hast?

8.65 Ein Set Preferencekarten besteht aus 32 Karten in 4 Farben. Eine Karte wird gezogen. C

a) Ordne die passende Wahrscheinlichkeit zu.

Die Karte zeigt keinen Mann (Unter, Ober oder König).	
Die Karte zeigt eine Zahl.	

A	$P(E) = \frac{3}{32}$
B	$P(E) = 1 - \frac{5}{8}$
C	$P(E) = \frac{1}{2}$
D	$P(E) = 1 - \frac{3}{8}$

b) Ordne das passende Ereignis zu.

$P(E) = \frac{1}{16}$	
$P(E) = \frac{1}{4}$	

A	Es ist ein Blatt- oder Herzass.
B	Es ist eine Herzkarte.
C	Es ist eine Karte ohne Zahl.
D	Es ist eine Blatt- oder Herzkarte.

8.66 In einer Straßenbahn fahren 28 Fahrgäste, davon haben 12 eine Jahreskarte. Die Hälfte der Jahreskartenbesitzer sind Senioren, ein Sechstel Studenten. Ein Kontrollor überprüft die Fahrausweise. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine überprüfte Person B

1) keine Jahreskarte besitzt?
2) ein Senior mit Jahreskarte ist?
3) ein Student mit Jahreskarte ist?
4) weder Senior noch Student mit Jahreskarte ist?

8.67 Jemand würfelt mit einem idealen Würfel dreimal hintereinander. Gib die Wahrscheinlichkeit für das beschriebene Ereignis an. B

a) Augensumme drei
b) Augensumme 17
c) erster Wurf eins
d) letzter Wurf fünf oder sechs
e) drei gleiche Augenzahlen
f) drei verschiedene Augenzahlen

8.2.2 Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse

Additionssatz

ZB: Aus einem Schnapskartenspiel wird eine Karte gezogen. Man berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass diese Karte entweder die Farbe Herz **oder** Karo hat.

$P(\text{Herz}) = \frac{5}{20}$; $P(\text{Karo}) = \frac{5}{20}$

$P(\text{Herz } \textbf{oder} \text{ Karo}) = \frac{5}{20} + \frac{5}{20} = \frac{1}{2}$

Die Ereignisse A = „Herz" und B = „Karo" können nie gleichzeitig eintreten, man nennt solche Ereignisse **einander ausschließend**. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A **oder** das Ereignis B eintritt, ist die **Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten**. Diese Überlegung lässt sich sinngemäß auch auf mehr als zwei Ereignisse anwenden. Man spricht dann von einander paarweise ausschließenden Ereignissen.

Schnapsen ist ein beliebtes Kartenspiel, das zum Beispiel mit 20 französischen Karten gespielt wird. Es gibt von den vier Farben Herz, Karo, Pik und Kreuz (Treff) je 5 Karten: Ass, Zehner, König, Dame, Bube

Abb. 8.1

Für einander **nicht ausschließende** Ereignisse müssen weitere Überlegungen getroffen werden.

ZB: Aus einem Schnapskartenspiel wird eine Karte gezogen. Man berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Herzkarte **oder** ein Ass ist.

Es gibt 5 Herzkarten, also ist $P(\text{Herz}) = \frac{5}{20}$

Es gibt 4 Asse, daher gilt: $P(\text{Ass}) = \frac{4}{20}$

Für das Herzass gilt: $P(\text{Herzass}) = \frac{1}{20}$

Die Ereignisse A = „Es wird eine Herzkarte gezogen." und B = „Es wird ein Ass gezogen." schließen einander nicht aus. Das in beiden Einzelwahrscheinlichkeiten berücksichtigte **Herzass** wurde doppelt eingerechnet und muss daher einmal **subtrahiert** werden:

$P(\text{Herz oder Ass}) = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Für **zwei Ereignisse** A und B, die **einander nicht ausschließen**, gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass das eine **oder** das andere Ereignis eintritt, ist die **Summe** der Einzelwahrscheinlichkeiten, **vermindert um** die (doppelt berücksichtigte) Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse **gemeinsam** eintreten.

Additionssatz für die „oder"-Verknüpfung von Ereignissen

$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$	A, B ... einander ausschließende Ereignisse
$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ und } B)$	A, B ... beliebige Ereignisse

AB **8.68** In einer Schachtel sind folgende Kugeln: 3 große rote, 4 kleine rote, 2 große blaue, 5 kleine blaue, 4 große gelbe und 3 kleine gelbe Kugeln. Jemand zieht – ohne hineinzuschauen – eine Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel

a) gelb oder rot ist? ***b)*** groß oder rot ist? ***c)*** groß oder nicht rot ist?

Lösung:

a) $P(\text{gelb oder rot}) = P(\text{gelb}) + P(\text{rot}) = \frac{7}{21} + \frac{7}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\ \%$

b) $P(\text{groß oder rot}) = P(\text{groß}) + P(\text{rot}) - P(\text{groß und rot}) = \frac{9}{21} + \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{13}{21} \approx 61{,}9\ \%$

c) $P(\text{groß oder nicht rot}) = P(\text{groß}) + P(\text{nicht rot}) - P(\text{groß und nicht rot}) =$
$= \frac{9}{21} + \left(1 - \frac{7}{21}\right) - \frac{6}{21} = \frac{17}{21} \approx 81{,}0\ \%$

Multiplikationssatz und bedingte Wahrscheinlichkeit

Oft hängt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses vom Ergebnis eines anderen Ereignisses ab.

ZB: In einer Schachtel sind 7 blaue und 3 rote Kugeln. Man zieht 2-mal und möchte die Wahrscheinlichkeit ermitteln, dass man dabei 2 rote Kugeln gezogen hat. Dabei muss man unterscheiden, ob nach dem ersten Zug die Kugel wieder zurückgelegt wird oder nicht.

Wird die Kugel zurückgelegt, so gibt es für das zweimalige Ziehen $10 \cdot 10 = 100$ verschiedene Versuchsausgänge. Da es 3 rote Kugeln gibt, gibt es $3 \cdot 3 = 9$ günstige Möglichkeiten für das Ziehen von 2 roten Kugeln.
Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, 2 rote Kugeln zu ziehen: $P(\text{rot und rot}) = \frac{9}{100}$
Diese Rechnung kann auch mithilfe der Einzelwahrscheinlichkeiten durchgeführt werden.
Die Wahrscheinlichkeit, beim 1. Ziehen eine rote Kugel zu erhalten, ist: $P(\text{rot}) = \frac{3}{10}$
Wird die Kugel zurückgelegt, so bleibt die Wahrscheinlichkeit beim 2. Zug gleich: $P(\text{rot}) = \frac{3}{10}$
Die Wahrscheinlichkeit, zwei Mal rot zu ziehen, ist daher:
$P(\text{rot und rot}) = P(\text{rot}) \cdot P(\text{rot}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 9\,\%$

Legt man die gezogene rote Kugel hingegen nicht zurück, so ändert sich beim 2. Zug die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis. Sie ist **abhängig** vom Ergebnis des 1. Zugs.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis B eintritt, **vorausgesetzt** ein Ereignis A ist bereits eingetreten, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit**. Man schreibt **P(B|A)**, wobei der senkrechte Strich als „unter der Bedingung" gesprochen wird.

$P(\text{2. Kugel rot} \mid \text{1. Kugel rot}) = \frac{2}{9}$

Für die Wahrscheinlichkeit, 2 rote Kugeln zu ziehen, gilt dann:
$P(\text{rot und rot}) = P(\text{1. Kugel rot}) \cdot P(\text{2. Kugel rot} \mid \text{1. Kugel rot}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 6{,}7\,\%$

Multiplikationssatz für die „und"-Verknüpfung von Ereignissen
$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$ A, B ... voneinander unabhängige Ereignisse
$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ A, B ... beliebige Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis B eintritt, **vorausgesetzt** ein Ereignis A ist bereits eingetreten, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit** und schreibt **P(B|A)**.
Ist das Ereignis B vom Ereignis A **unabhängig**, so hat die Voraussetzung, dass A eingetreten ist, keinerlei Einfluss auf B, es gilt also in diesem Fall: $P(B|A) = P(B)$

Durch Umformen erhält man die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \Rightarrow \quad P(B|A) = \frac{P(A \text{ und } B)}{P(A)}$$

Der Zusammenhang zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten P(A|B) und P(B|A) wurde von Thomas Bayes formuliert (englischer Mathematiker und Theologe, um 1701 – 1761) und wird **Satz von Bayes** genannt.
Da die Wahrscheinlichkeiten P(B und A) und P(A und B) gleich sind, gilt:

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Satz von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

AB **8.69** In einer Textilfabrik werden an Jeans drei verschiedene, unabhängig voneinander auftretende Mängel erhoben. Farbfehler treten bei 5 % der Hosen auf, Verarbeitungsfehler bei 3 % und defekte Zippverschlüsse bei 2 %.

a) Wie viel Prozent der Hosen haben korrekte Farbe und Verarbeitung, aber einen defekten Zipp?
b) Wie viel Prozent der Hosen sind fehlerfrei?
c) Wie viel Prozent aller Hosen sind mangelhaft?

Lösung:

a) P(Farbe korrekt und Verarbeitung korrekt und Zipp defekt) =
= P(Farbe korrekt) · P(Verarbeitung korrekt) · P(Zipp defekt) =
$= (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}03) \cdot 0{,}02 = 0{,}0184... \approx 1{,}8\ \%$

b) P(fehlerfrei) = P(Farbe korrekt und Verarbeitung korrekt und Zipp korrekt) =
= P(Farbe korrekt) · P(Verarbeitung korrekt) · P(Zipp korrekt) =
$= (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}03) \cdot (1 - 0{,}02) = 0{,}9030... \approx 90{,}3\ \%$

c) $P(\text{mangelhaft}) = 1 - P(\text{fehlerfrei}) = 1 - 0{,}9030... = 0{,}0969... \approx 9{,}7\ \%$

AB **8.70** An einer Schule mit 430 Schüler/innen wurde eine Erhebung gemacht, wie viele von ihnen bereits einen Führerschein haben.
Eine Person X wird zufällig ausgewählt.
Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

Führerschein	JA	NEIN	Gesamt
Schülerinnen	103	140	243
Schüler	87	100	187
Gesamt	190	240	430

a) P(X ist Schüler)
b) P(X ist Schülerin)
c) P(X hat Führerschein|ist Schüler)
d) P(X ist Schüler|hat Führerschein)
e) P(X ist Schülerin|hat keinen Führerschein)
f) P(X hat Führerschein|ist Schülerin)

Lösung:

a) $P(\text{X ist Schüler}) = \frac{187}{430} \approx 43{,}5\ \%$

b) $P(\text{X ist Schülerin}) = \frac{243}{430} \approx 56{,}5\ \%$

c) $P(\text{X hat Führerschein}|\text{ist Schüler}) = \frac{P(\text{X ist Schüler und hat Führerschein})}{P(\text{X ist Schüler})} = \frac{\frac{87}{430}}{\frac{187}{430}} \approx 46{,}5\ \%$

d) $P(\text{X ist Schüler}|\text{hat Führerschein}) = \frac{P(\text{X ist Schüler und hat Führerschein})}{P(\text{X hat Führerschein})} = \frac{\frac{87}{430}}{\frac{190}{430}} \approx 45{,}8\ \%$

e) P(X ist Schülerin|hat keinen Führerschein) =

$= \frac{P(\text{X ist Schülerin und hat keinen Führerschein})}{P(\text{X hat keinen Führerschein})} = \frac{\frac{140}{430}}{\frac{240}{430}} \approx 58{,}3\ \%$

f) $P(\text{X hat Führerschein}|\text{ist Schülerin}) = \frac{P(\text{X ist Schülerin und hat Führerschein})}{P(\text{X ist Schülerin})} = \frac{\frac{103}{430}}{\frac{243}{430}} \approx 42{,}4\ \%$

AB **8.71** Ein Bauer füllt in zwei von vier Zwei-Liter-Flaschen versehentlich Wein statt Traubensaft ein und verkauft die Flaschen. Da er alle vier Käufer kennt, geht er auf die Suche nach den falschen Flaschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bereits nach zwei Versuchen die beiden falschen Flaschen gefunden zu haben? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei drei Personen suchen zu müssen?

ABD **8.72** In einer Lieferung von Neonröhren haben 2 % den Defekt A und 3 % den davon unabhängigen Defekt B.

1) Erkläre mithilfe des Multiplikationssatzes, wie viel Prozent nur den Defekt A haben.
2) Berechne, wie viel Prozent keinen Defekt haben.
3) Berechne, wie viel Prozent genau einen Defekt haben.

8.73 Es wurde erhoben, wie viele Schülerinnen und Schüler schifahren und wie viele snowboarden möchten. Eine Person S wird zufällig ausgewählt. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

Schikurs	Schi	Snowboard
Schülerinnen	17	7
Schüler	41	27

AB

1) P(S ist eine Schülerin)
2) P(S ist ein Schüler)
3) P(S ist eine Schülerin|fährt Snowboard)
4) P(S ist ein Schüler|fährt Schi)
5) P(S fährt Schi|ist Schülerin)
6) P(S fährt Snowboard|ist Schüler)

8.74 Eine Reisegruppe aus 220 Personen wird in Vormittags- und Nachmittagsgruppen geteilt. Am Vormittag gehen 66 Personen ins Museum und 76 wählen die Stadtrundfahrt. Am Nachmittag wählen 43 Personen das Museum und 35 die Stadtrundfahrt. Eine Person A wird zufällig ausgewählt. Ermittle folgende Wahrscheinlichkeiten:

AB

1) P(A ist in der Vormittagsgruppe|A wählt das Museum)
2) P(A ist in der Nachmittagsgruppe|A wählt die Stadtrundfahrt)
3) P(A wählt das Museum|A ist in der Nachmittagsgruppe)

8.75 Ein Bauteil hat innerhalb des Wartungsintervalls eine Ausfallsicherheit von 98 %. Welche Sicherheit erzielt man, wenn drei solcher Bauteile so eingebaut werden, dass es für die Funktionstüchtigkeit ausreicht, wenn mindestens einer davon funktioniert?

AB

8.76 Susis Freilandeier wurden auf Frische, Korrektheit der Gewichtsklassenangabe und Bruch der Schale getestet. 2 % der Eier sind nicht frisch genug, 3 % sind leichter als es der angegebenen Gewichtsklasse entspricht, bei 1,5 % ist die Schale beschädigt. Es kann davon ausgegangen werden, dass diese drei Fehler einander nicht beeinflussen.

ABC

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein untersuchtes Ei
- **a)** keinen Mangel aufweist?
- **b)** mindestens einen der drei Fehler aufweist?
- **c)** zu leicht oder nicht frisch genug oder beides ist?
- **d)** entweder zu leicht oder nicht frisch genug ist (aber nicht beides)?

2) Interpretiere, welche Wahrscheinlichkeit durch folgenden Ausdruck berechnet wird.
a) $0{,}02 \cdot 0{,}03$ **b)** $0{,}015 + 0{,}03 - 0{,}015 \cdot 0{,}03$ **c)** $0{,}015 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}98$

8.77 Eine Wasserprobe wird auf Verunreinigungen untersucht. Der Test erkennt eine Verunreinigung zu 85 %. Wie oft muss man den Test durchführen, um eine Verunreinigung mit mindestens 99%iger Sicherheit zu entdecken?

AB

Lösung:

P(erkennen) $\geq 0{,}99 \Rightarrow$ P(nicht erkennen) $< 0{,}01$

P(bei einer Kontrolle übersehen) $= 0{,}15 \Rightarrow$ ● Gegenwahrscheinlichkeit

P(bei n Kontrollen übersehen) $= 0{,}15 \cdot 0{,}15 \cdot \ldots \cdot 0{,}15 = 0{,}15^n$

$0{,}15^n < 0{,}01 \quad |\ \ln \ldots$

$n \cdot \ln(0{,}15) < \ln(0{,}01) \quad |:\ln(0{,}15)$ ● $\ln(0{,}15) < 0 \Rightarrow$ Umkehr des Ungleichheitszeichens

$n > 2{,}4\ldots \Rightarrow$ Der Test muss dreimal durchgeführt werden.

8.78 In die Signalanlage einer Eisenbahnkreuzung werden Lampen eingebaut, die im Wartungszeitraum eine Ausfallsicherheit von 97 % haben.

AB

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Signal funktioniert, wenn man fünf Lampen eingebaut hat, von denen mindestens eine funktionieren muss?
2) Wie viele Lampen muss man einbauen, um die Ausfallwahrscheinlichkeit auf ein Zehntel des in **1)** ermittelten Werts zu senken?
3) Wie hoch müsste die Ausfallsicherheit einer Lampe sein, um die in **2)** ermittelte Sicherheit mit nur fünf Lampen zu erzielen?

8.2.3 Baumdiagramme

AB **8.79** An den Kreuzungen A, B und C wird das Verkehrsaufkommen gezählt. In A nehmen 60 % der Autos den Weg Richtung B, die anderen fahren nach C. In B entscheiden sich 25 % für den Weg nach D, in C zweigen 70 % nach F ab.

1) Wie viel Prozent aller in A abfahrenden Autos fahren nach G?

2) Zwischen den Orten E und F soll ein gemeinsamer Parkplatz errichtet werden. Mit wie viel Prozent der in A abfahrenden Autos muss man dort rechnen?

Viele Zufallsversuche setzen sich aus mehreren Teilversuchen zusammen, die jeweils wieder Zufallsversuche sind. Schließen dabei die möglichen Versuchsausgänge einander aus, so kann man den mehrstufigen Zufallsversuch übersichtlich in einem **Baumdiagramm** darstellen.

ZB: In einer Urne befinden sich vier rote, drei blaue und zwei grüne Kugeln. Zwei Kugeln werden hintereinander (ohne Zurücklegen) gezogen. Man überlegt mithilfe eines Baumdiagramms, wie wahrscheinlich die verschiedenen Farbkombinationen sind. Beim 1. Zug sind drei Ausgänge mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{9}$ und $\frac{2}{9}$ möglich. Da die Ergebnisse einander ausschließen, muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben.

Im Baumdiagramm wird der Zug mit einem Knoten dargestellt, von dem drei Linien wegführen, die für die drei möglichen Ausgänge stehen. Die Linien werden mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und Ausgängen beschriftet. Für jedes Ergebnis des 1. Zugs wird nun der 2. Zug analog dargestellt. Die neun Enden symbolisieren die neun möglichen Ergebnisse.

Ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, eine rote und eine blaue Kugel in beliebiger Reihenfolge zu ziehen, so sucht man am Ende des Diagramms alle Ergebnisse, die diesem Ereignis entsprechen.

Hier tritt das Ergebnis „rot und blau“ zwei Mal auf. Für jedes dieser Ergebnisse wird die zugehörige Wahrscheinlichkeit ermittelt, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads multipliziert, da es sich um eine „und“-Verknüpfung handelt.

P(🔴🔵) $= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$; P(🔵🔴) $= \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$

Da (🔴🔵) oder (🔵🔴) möglich sind, gilt:

P(rot und blau) $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Aus den Überlegungen des obigen Beispiels ergeben sich die folgenden Regeln:

1. Pfadregel – „und“-Verknüpfung
Die Wahrscheinlichkeit am Ende eines Pfads erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads multipliziert.

2. Pfadregel – „oder“-Verknüpfung
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das sich aus mehreren Ergebnissen zusammensetzt, ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

8.80 Die Schülerinnen und Schüler des 2. Jahrgangs sind auf 4 Klassen aufgeteilt. 28 % der Schülerinnen und Schüler sind in der 2A, 26 % in der 2B und je 23 % in der 2C und 2D. 85 % der Schülerinnen und Schüler der 2A, 70 % der 2B, 62 % der 2C und 31 % der 2D besuchen einen Freigegenstand.

AB

1) Stelle den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person einen Freigegenstand besucht.

3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die einen Freigegenstand besucht, aus der 2B stammt.

Lösung:

1)

2) P(Freigegenstand) $= 0{,}28 \cdot 0{,}85 + 0{,}26 \cdot 0{,}70 + 0{,}23 \cdot 0{,}62 + 0{,}23 \cdot 0{,}31 =$
$= 0{,}6339 = 63{,}39\ \%$

3) P(2B|Freigegenstand) $= \frac{0{,}26 \cdot 0{,}70}{0{,}6339} =$ ● bedingte Wahrscheinlichkeit
$= 0{,}28711... \approx 28{,}71\ \%$

8.81 Aus einer Produktion mit fehlerfreien (f) und defekten (d) Produkten werden drei Produkte entnommen. Ordne jeweils dem im Baumdiagramm färbig markierten Pfad die zutreffende Aussage zu.

C

A	Nur das dritte Stück ist defekt.
B	Nur das erste Stück ist defekt.
C	Das zweite und das dritte Stück sind defekt.
D	Das erste und das dritte Stück sind fehlerfrei.

8.82 In einer Urne sind x rote und y gelbe Kugeln. Es wird 3-mal eine Kugel gezogen. Trage in das Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

BC

a) Ziehen ohne Zurücklegen

b) Ziehen mit Zurücklegen

Wahrscheinlichkeitsrechnung

AB **8.83** Bei einer Lotterie gibt es 500 Lose, davon sind 4 Gewinnlose. Berechne mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten, beim Kauf von zwei Losen
1) genau ein Gewinnlos zu erhalten.
2) genau zwei Gewinnlose zu erhalten.
3) mindestens ein Gewinnlos zu erhalten.

AB **8.84** In einer Schraubenpackung sind 50 Stück, zwei Schrauben davon sind defekt. Man nimmt vier Schrauben hintereinander heraus.
1) Veranschauliche den Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms.
2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den vier gezogenen Schrauben die zwei defekten Schrauben befinden.

CD **8.85** In einer Obstschale sind Zwetschken und Orangen.
1) Argumentiere, ob das nebenstehende Baumdiagramm „Ziehen mit Zurücklegen" oder „Ziehen ohne Zurücklegen" darstellt.
2) Interpretiere, welche Wahrscheinlichkeit mit dem Ausdruck berechnet wird.
$P(E_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$
$P(E_2) = 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$

ABD **8.86** In einer Lade sind 7 graue, 9 schwarze und 5 blaue Socken. Herr Müller nimmt im finsteren Zimmer „blind" zwei Socken aus der Lade.
1) Zeichne ein Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
i) ein Socken blau und der andere schwarz ist. ***iii)*** beide Socken schwarz sind.
ii) die beiden Socken farblich zusammenpassen.
2) Argumentiere, ob sich die Wahrscheinlichkeiten aus **1)** verändern, wenn die Anzahl der Socken jeder Farbe verdoppelt wird.

ABCD **8.87** Ein Behälter mit 20 Glühbirnen enthält vier defekte Glühbirnen. Es werden drei Glühbirnen entnommen.
1) Ergänze im Diagramm die Wahrscheinlichkeiten.
2) Beschreibe die notwendigen Rechenschritte für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass man genau zwei defekte Glühbirnen zieht. Erkläre, welche Rechenregeln du dabei anwendest.

ABD **8.88** Für den neuen Beta Julia 147 werden Scheibenwischer von drei verschiedenen Herstellerfirmen verwendet, wobei Firma A 15 %, Firma B 35 % und Firma C 50 % liefert. Nach einer Prüfserie hat man festgestellt, dass 8 % der Scheibenwischer der Firma A, 20 % der Wischer von Firma B und 7 % der Wischer der Firma C unbrauchbar sind.
1) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein zufällig ausgewählter Wischer
i) unbrauchbar ist. ***iii)*** von Firma A stammt und unbrauchbar ist.
ii) in Ordnung ist. ***iv)*** von Firma A stammt, wenn er unbrauchbar ist.
2) Erkläre den Unterschied zwischen den Ergebnissen aus ***iii)*** und ***iv)***.

AB **8.89** Markus hat in seiner Geldbörse zwei 2-€-Münzen, zwei 1-€-Münzen und fünf 50-Cent-Stücke. Er nimmt zwei beliebige Münzen heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe
1) genau 3,00 € ergibt? **2)** mindestens 3,00 € ergibt? **3)** höchstens 3,00 € ergibt?

8.3 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

8.90 Auf Daniels Schulweg gibt es fünf Ampeln. Die Größe X beschreibt die Anzahl der roten Ampeln auf dem Weg zur Schule. Welche Werte kann X annehmen?

C

Zufallsvariable

Um den Ausgang eines Zufallsexperiments mathematisch zu erfassen, verwendet man **Zufallsvariablen** (**Zufallsgrößen**). Eine Zufallsvariable ist eine Variable, deren Wert – innerhalb gewisser Grenzen – vom Zufall bestimmt wird. Der Wertebereich entspricht den möglichen Ausgängen des Zufallsexperiments, der tatsächliche Wert der Zufallsvariablen hängt vom Zufall ab. Wird zum Beispiel mit einem fairen Würfel gewürfelt, so ist die Augenzahl eine Zufallsvariable, die die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen kann.

Eine **Zufallsvariable X** ist eine Variable, deren Wert x vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängt.

Man unterscheidet:

- **Diskrete Zufallsvariable**
  Die Variable X nimmt **abzählbar viele Werte** x_i an. Sie ist im Allgemeinen das Ergebnis eines **Zählvorgangs**.
  Beispiel: Anzahl der fehlerhaften Stücke in einer Stichprobe
- **Stetige Zufallsvariable**
  Die Variable X kann **alle Werte** x eines Intervalls annehmen. Sie ist im Allgemeinen das Ergebnis eines **Messvorgangs**.
  Beispiel: Länge eines zufällig ausgewählten Bolzens

Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** g ordnet jedem möglichen Wert einer Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens zu. Die Summe aller Werte von g(x) ist 1.

ZB: Ist die Zufallsvariable X die gewürfelte Augenzahl, so kann sie die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen.
Für x = 1 gilt: $P(X = 1) = \frac{1}{6} \Rightarrow g(1) = \frac{1}{6}$
Zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsfunktion wird meist ein Stabdiagramm verwendet.

Die **Verteilungsfunktion** G ordnet jedem Wert einer Zufallsvariable die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Zufallsvariable höchstens diesen Wert annimmt. Sie ist also die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten bis zu diesem Wert.

Die Funktion G ist stückweise konstant, also eine Treppenfunktion. Links vom kleinsten Wert, den X annehmen kann, ist G(x) konstant 0, ab den größten Wert, den X annehmen kann, ist G(x) gleich 1.

ZB: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl beim Würfeln höchstens 2 ist, ist die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
$P(X \leqslant 2) = P(X = 1 \text{ oder } X = 2) = G(2) = g(1) + g(2) = \frac{1}{3}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion g** ordnet jedem Wert einer diskreten Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens zu. Es gilt:

$$g(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{für } x = x_1, x_2, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die **Verteilungsfunktion G** ordnet jedem Wert x die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Zufallsvariable höchstens diesen Wert annimmt.

$$G(x) = P(X \leqslant x) = \sum_i g(x_i) \qquad \text{für } x_i \leqslant x$$

BD **8.91** Es wird mit zwei unterscheidbaren Würfeln gewürfelt und die Augensumme notiert. Bestimme die Zufallsvariable und die möglichen Werte der Zufallsvariablen. Erstelle eine Tabelle der Wahrscheinlichkeits- und der Verteilungsfunktion. Veranschauliche beide Funktionen grafisch. Beschreibe den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen.

Lösung:
Zufallsvariable X … Augensumme
mögliche Werte: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
G(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion und der Verteilungsfunktion:

Die Treppenfunktion stellt die aufsummierten Einzelwahrscheinlichkeiten dar und „springt“ somit jeweils um den Wert der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei diskreten Verteilungen

BC **8.92** Martin und Petra vereinbaren folgendes Spiel mit Spielgeld: Petra wirft eine Münze. Zeigt diese „Zahl“, bekommt sie 1 €, zeigt die Münze „Kopf“, bezahlt sie 1 € an Martin.

1) Mit welchem Gewinn rechnet Petra, wenn sie das Spiel oft spielt?

2) Martin verwendet eine gefälschte Münze, die 3-mal so oft „Kopf“ zeigt wie „Zahl“. Berechne, wie sich das Verwenden dieser Münze langfristig auf Petras Gewinn auswirkt.

Wird ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt, so lässt sich das mit der Wahrscheinlichkeit gewichtete arithmetische Mittel aller von der Zufallsvariablen angenommenen Werte berechnen. Dieser Mittelwert wird als **Erwartungswert** E(X) der Zufallsvariablen X bezeichnet. Er gibt an, welchen Wert man im Mittel bei sehr vielen Versuchen erwarten kann.
Die tatsächlichen Werte streuen mehr oder weniger stark um den Erwartungswert. Als Maß für diese Streuung verwendet man die Summe der gewichteten Abweichungsquadrate vom Erwartungswert. Diese Summe heißt **Varianz** V(X). Das anschaulichere Maß ist die Wurzel aus der Varianz, die so genannte **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Erwartungswert E(X) einer diskreten Zufallsvariablen
Ist X eine Zufallsvariable, die die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1)$, $P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$ annimmt, dann gilt für den Erwartungswert E(X) der Variablen X:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g(x_i)$$

Varianz V(X) und Standardabweichung σ einer Zufallsvariablen

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot g(x_i)) - \mu^2 \text{ und } \sigma = \sqrt{V(X)}$$

8.93 Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Augenzahlen beim Würfeln mit einem Würfel. B

Lösung:

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

$V(X) = \left(1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - 3{,}5^2 = 2{,}91\dot{6} \Rightarrow \sigma = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}71$

8.94 Gib jeweils an, ob die Variable diskret oder stetig ist. Begründe deine Antwort. CD

1) Augensumme von Würfeln
2) Abmessungen eines Bauteils
3) Kleidergrößen
4) Niederschlagsmenge in einem Zeitabschnitt

8.95 Bestimme die Zufallsvariable und ihre möglichen Werte. Stelle die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion grafisch dar. B

a) Man würfelt mit drei Würfeln und notiert die Anzahl der Würfel mit einer geraden Augenzahl.
b) Man wirft viermal eine Münze und notiert die Anzahl von „Wappen".

8.96 Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für B

a) die Augensumme beim Würfeln mit zwei ununterscheidbaren Würfeln.
b) die Anzahl von „Zahl" beim dreimaligen Münzwurf.

8.97 In einer Urne sind 4 grüne, 5 weiße und 6 orange Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Ermittle den Erwartungswert und die Standardabweichung für X. B

a) X ... Anzahl der grünen Kugeln
b) X ... Anzahl der Kugeln, die nicht weiß sind

8.98 Beim französischen Roulette gibt es 37 Felder. Dabei ist die Ziffer null auf einem grünen Feld und die übrigen Zahlen sind jeweils zur Hälfte auf roten und schwarzen Feldern. Man kann auf rot bzw. schwarz setzen. Nur wenn die gesetzte Farbe mit der Gewinnfarbe übereinstimmt, bekommt man den Einsatz zurück und erhält zusätzlich einen Gewinn in der Höhe des Einsatzes, sonst verliert man den Einsatz. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für den Gewinn bei einem Einsatz von 20,00 €, wenn man immer auf schwarz setzt. AB

8.99 Argumentiere, ob die nebenstehende Abbildung eine Wahrscheinlichkeits- oder eine Verteilungsfunktion darstellt. Formuliere einen passenden Aufgabentext. CD

8.4 Diskrete Verteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden verwendet, um anzugeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einem Zufallsexperiment die Zufallsvariable X einen bestimmten Wert $P(X = x)$ oder Werte $P(X \leq x)$ annimmt. Von einer **diskreten Verteilung** spricht man, wenn der Wertebereich der Zufallsvariable X diskret ist.

8.4.1 Binomialverteilung

AB **8.100** ***1)*** Ermittle, wie viele Möglichkeiten es gibt, bei fünf Würfen mit einem idealen Würfel genau zwei Sechser zu erhalten.
2) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man nur beim zweiten und beim dritten Wurf einen Sechser würfelt.

In vielen Fällen lässt sich der Ausgang eines Zufallsexperiments mit lediglich zwei Ergebnissen beschreiben, zum Beispiel „Wappen" oder „Zahl" beim Münzwurf, „einwandfrei" oder „nicht einwandfrei" bei der Qualitätsprüfung, „funktioniert" oder „funktioniert nicht" bei der Prüfung einer technischen Anlage. Auch beim Werfen eines Würfels können die Versuchsausgänge zum Beispiel auf die zwei Ereignisse „6er" oder „kein 6er" reduziert werden. Allgemein kann man von „Erfolg" oder „Nicht-Erfolg" sprechen.
Man nennt diese Versuche **Bernoulli-Experimente**, benannt nach Jakob Bernoulli.

Bernoulli-Experimente sind **beliebig oft wiederholbare** Experimente, die

- **genau zwei mögliche Ergebnisse** haben,
- unabhängig voneinander sind und
- bei denen **jedes Ergebnis jedes Mal** mit **derselben Wahrscheinlichkeit p** eintritt.

Allgemein entspricht ein Bernoulli-Experiment dem Modell „**Ziehen mit Zurücklegen**".

ZB: Ein Lieferant für Frischeier aus biologischer Landwirtschaft behauptet, dass 15 % der Eier eine weiße Schale haben, der Rest sind braune Eier. Jemand kauft eine Packung mit 4 Eiern und möchte wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in der Packung genau 2 Eier eine weiße Schale haben.

Zunächst wird geprüft, ob ein Bernoulli-Experiment vorliegt.

- Für ein Ei gibt es genau zwei Möglichkeiten:
  Es kann weiß oder braun sein.
- Die Farbe eines Eies hat keinen Einfluss auf die Farbe der anderen Eier.
  Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Ei weiß ist, wird durch die Farbe der anderen Eier nicht beeinflusst. Die Ergebnisse sind also voneinander unabhängig.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei weiß ist, ist konstant.
  Sie beträgt 15 %: $P(\text{weiß}) = 0{,}15$

  Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei braun ist:
  $P(\text{braun}) = 1 - P(\text{weiß}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85 = 85\ \%$

Es liegt also ein Bernoulli-Experiment vor.

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, dass unter 4 zufällig ausgewählten Eiern 2 weiße Eier sind. Dieses Zufallsexperiment entspricht dem Modell „4-maliges Ziehen mit Zurücklegen“, da die Einzelwahrscheinlichkeiten gleich bleiben.
Dabei gilt: P(w) = 0,15 und P(b) = 0,85.

Die möglichen Versuchsausgänge können mithilfe eines Baumdiagramms dargestellt werden:

w … weiß
b … braun

Es gibt 6 Pfade, in denen 2 weiße und 2 braune Eier vorkommen.
Durch Anwenden der 1. und 2. Pfadregel erhält man: $P(2\ w) = 6 \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^2 = 0{,}0975\ldots \approx 9{,}8\ \%$
Da das Baumdiagramm für mehrere Stufen zu aufwändig wird, soll nun eine Formel für die Wahrscheinlichkeitsfunktion hergeleitet werden.
X … Anzahl der weißen Eier unter 4 zufällig ausgewählten

$P(X = 0) = 0{,}15^0 \cdot (1 - 0{,}15)^4$

- Es gibt nur 1 Möglichkeit für kein weißes Ei.

$P(X = 1) = 4 \cdot 0{,}15^1 \cdot (1 - 0{,}15)^3$

- 1 Ei ist weiß, 3 sind braun. Das weiße Ei kann das 1., 2., 3. oder 4. Ei sein.

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot (1 - 0{,}15)^2$

- 2 Eier sind weiß, 2 Eier sind braun. Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ Kombinationen von 2 weißen Eiern aus 4 Eiern.

Allgemein gilt:

$P(X = x) = \binom{4}{x} 0{,}15^{x} \cdot (1 - 0{,}15)^{4-x}$

- $\binom{4}{x}$ … mögliche Kombinationen

x … Anzahl der weißen Eier
(4 – x) … Anzahl der nicht weißen Eier

Eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet man als **Binomialverteilung**. Im Rahmen der Qualitätssicherung wird die Binomialverteilung oft bei der Prüfung auf fehlerhafte Einheiten verwendet. Auch wenn es sich dabei um „Ziehen ohne Zurücklegen“ handelt, kann bei großen Stückzahlen die Binomialverteilung verwendet werden.

Binomialverteilung

$g(x; n, p) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n - x}$

n … Anzahl der Versuche
p … Erfolgswahrscheinlichkeit eines Versuchs
x … Anzahl der Erfolge

Dabei gilt:
- Es gibt genau zwei Möglichkeiten für den Ausgang eines Zufallsexperiments.
- Die Ereignisse müssen voneinander unabhängig sein.
- Die Wahrscheinlichkeit p bleibt konstant.

Erwartungswert, **Varianz** und **Standardabweichung** einer **Binomialverteilung**

$\mu = E(X) = n \cdot p$ $\qquad V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ $\qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Mathcad, Excel: www.hpt.at

Technologieeinsatz: Binomialverteilung

GeoGebra

Im Menü **Ansicht**, **Wahrscheinlichkeitsrechner** kann man die **Binomialverteilung** auswählen. Dort können die Parameter und der Bereich eingegeben werden.

Binomial
n 11 p 0.05
P(X ≤ 2) = 0.9848

TI-Nspire

Im Menü **5: Wahrscheinlichkeit**, **5: Verteilungen** stehen Funktionen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeits- und der Verteilungsfunktion zur Verfügung. Die Parameter der Verteilung können über eine Eingabemaske eingegeben oder direkt eingetippt werden. Die Ausgabe erfolgt im Calculator.

1: Aktionen
2: Zahl
3: Algebra
4: Analysis
5: Wahrscheinlichkeit
6: Statistik
7: Matrix und Vektor
8: Finanzen
9: Funktionen und Progr

1: Fakultät (!)
2: Permutationen
3: Kombinationen
4: Zufallszahl
5: Verteilungen...

8: χ² Cdf...
9: Invers χ²...
A: F Pdf...
B: F Cdf...
C: Invers F...
D: Binomial Pdf...
E: Binomial Cdf...
F: Geometrische Pdf...
G: Geometrische Cdf...

Wahrscheinlichkeitsfunktion (Probability density function) $P(X = x)$ ... **binomPdf(n,p,x)**
Verteilungsfunktion (Cumulativ distribution function) $P(a \leq X \leq b)$ ... **binomCdf(n,p,a,b)**
Werden nur die Parameter n, p eingegeben, erhält man eine Liste der Wahrscheinlichkeiten.

AB

8.101 Eine Werkstättenlehrerin weiß aus Erfahrung, dass 5 % aller Schülerinnen und Schüler an einem Werkstättentag die Arbeitsmäntel vergessen haben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 11 Jugendlichen

1) genau 4, ***2)*** höchstens 2 ihren Arbeitsmantel vergessen haben.

Lösung mit TI-Nspire:
$n = 11$, $p = 0{,}05$
X ... Anzahl der vergessenen Arbeitsmäntel

1) $P(X = 4) = g(4) = \binom{11}{4} \cdot 0{,}05^4 \cdot (1 - 0{,}05)^{11-4}$ • Wahrscheinlichkeitsfunktion

Binom Pdf
Anz. Versuche, n: 11
Wahrscheinlichkeit, p: 0.05
X-Wert: 4

bzw. binomPdf(11,0.05,4) 0.00144

P(4 fehlende Mäntel) ≈ 0,14 %

2) $P(X \leq 2) = G(2) = g(0) + g(1) + g(2) =$ • Verteilungsfunktion

$$= \sum_{x=0}^{2} \binom{11}{x} \cdot 0{,}05^x \cdot 0{,}95^{11-x}$$

Binom Cdf
Anz. Versuche, n: 11
Wahrscheinlichkeit, p: 0.05
Untere Schranke: 0
Obere Schranke: 2

bzw. binomCdf(11,0.05,0,2) 0.984765

P(höchstens 2 fehlende Mäntel) ≈ 98,5 %

8.102 Wie oft müsste man mit einem idealen Würfel würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Sechser zu würfeln, bei mindestens 99 % liegt? B

Lösung:
$p = \frac{1}{6}$, X … Anzahl der Sechser

$P(\text{mindestens ein 6er}) = P(X \geq 1) \geq 0{,}99$
$1 - P(X < 1) \geq 0{,}99 \Rightarrow P(X = 0) \leq 0{,}01$

• Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit

$$P(X = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^0}_{=1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01 \quad |\ \ln \ldots$$

$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}01) \Rightarrow n \geq 25{,}258\ldots$

Man müsste mindestens 26-mal würfeln.

• $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$, daher wird bei der Division das Ungleichheitszeichen umgedreht.

8.103 In einer Dose mit 100 Kugeln befinden sich 30 grüne Kugeln. Jemand zieht 5-mal hintereinander eine Kugel, wobei jede Kugel nach dem Ziehen wieder zurückgelegt wird. ABC

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von den gezogenen Kugeln
a) alle fünf Kugeln grün sind.
b) mindestens eine Kugel grün ist.
c) genau eine grüne Kugel dabei ist.
d) höchstens zwei Kugeln grün sind.

2) Erkläre, welche Wahrscheinlichkeit mit dem Ausdruck $\binom{5}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2$ berechnet wird.

8.104 Bei einem Single-Choice-Test gibt es zu zehn Fragen jeweils vier mögliche Antworten, von denen nur eine richtig ist. Jemand kreuzt bei allen Fragen die Antworten zufällig an. ABD

1) Erkläre, warum die Binomialverteilung als Modell zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit verwendet werden kann.
2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, bei jeder Frage die richtige Antwort anzukreuzen.
3) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei mindestens sieben Fragen die richtige Antwort anzukreuzen.
4) Stelle die Verteilungsfunktion G grafisch dar.

8.105 In einem Restaurant mit 20 Tischen werden an einem Abend alle Tische reserviert. Man weiß aus Erfahrung, dass 8 % der gebuchten Tische nicht genutzt werden. ABCD

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
a) alle Tische besetzt sind.
b) weniger als zwei Tische frei bleiben.
c) mehr als 15 Tische besetzt sind.
d) höchstens 17 Tische besetzt sind.

2) Erkläre die Bedeutung der folgenden Ausdrücke in diesem Zusammenhang, wenn X die Anzahl der freien Tische angibt.
i) G(2) ***ii)*** g(2) ***iii)*** 1 – G(2)

3) Stelle die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion grafisch dar und markiere die Wahrscheinlichkeiten aus ***2)***.

8.106 75 % der Baumwollfasern einer bestimmten Sorte sind kürzer als 45 mm. ABC

1) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig entnommenen Fasern genau 3 Fasern kürzer als 45 mm sind.
2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, unter 5 Fasern mindestens 2 aber höchstens 4 Fasern zu erhalten, die kürzer als 45 mm sind.
3) Wie viele Fasern, die kürzer als 45 mm sind, kann man erwarten, wenn 10 entnommen werden?
4) Interpretiere den Ausdruck im Sachzusammenhang: $\sum_{x=9}^{10} \binom{12}{x} \cdot 0{,}75^x \cdot 0{,}25^{12-x}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

AB **8.107** Benjamin isst am liebsten Walnusseis. Bei seinem bevorzugten Eissalon beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem beliebigen Tag im Sortiment ist, 25 %. Benjamin geht an sieben Tagen je einmal zu diesem Eissalon.

1) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass das Walnusseis an diesen sieben Tagen mindestens zweimal angeboten wird.

2) Stelle einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit auf, dass das Walnusseis höchstens 4-mal angeboten wird.

3) Berechne, an wie vielen Tagen Benjamin in den Eissalon gehen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Walnusseis zu bekommen, mindestens 95 % beträgt.

ABCD **8.108** Für eine Werbeaktion wurde ein Achtel aller Kinokarten mit einer Markierung versehen, die zum kostenlosen Besuch eines weiteren Films berechtigt. Eine Gruppe von 25 Personen kauft 25 Kinokarten.

1) Erkläre, warum man die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Personen dieser Gruppe eine markierte Karte erhalten, mithilfe der Binomialverteilung berechnen kann.

2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens vier Personen markierte Karten erhalten. Stelle die Verteilungsfunktion grafisch dar und markiere diese Wahrscheinlichkeit.

3) Erkläre, welche Wahrscheinlichkeit in diesem Zusammenhang mit dem Ausdruck

$1 - \left[\binom{25}{0} \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}875^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}875^{24}\right]$ berechnet wird.

4) Ab welcher Anzahl von Karten ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine markiert ist, größer als 50 %?

ABD **8.109** Andrea gewinnt auf einem Schulball einen 10-kg-Sack Gummibärchen. Davon haben 13 % die Farbe grün.

1) Sie entnimmt diesem Sack 5 Gummibärchen. Erkläre, warum man die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau ein grünes Gummibärchen ist, mithilfe der Binomialverteilung berechnen kann.

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter zehn zufällig ausgewählten Gummibärchen ***a)*** drei grüne, ***b)*** mindestens ein grünes, ***c)*** höchstens drei grüne Bärchen zu finden?

3) Ermittle, wie viele Bärchen Andrea aus dem Sack nehmen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens ein grünes zu erhalten, über 95 % liegt.

4) Andrea greift in den Sack und nimmt 20 Gummibärchen heraus. Wie viele grüne Gummibärchen sind zu erwarten?

5) Wie groß müsste der Anteil an grünen Gummibärchen mindestens sein, damit Andrea unter zehn Bärchen mit einer Sicherheit von mindestens 90 % mindestens ein grünes Bärchen findet?

ABD **8.110** Die Lötstellen einer Leiterplatte werden stichprobenartig getestet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lötstelle defekt ist, beträgt 2 %.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, unter 500 getesteten Lötstellen, höchstens 4 defekte Lötstellen zu finden.

2) Erkläre in diesem Sachzusammenhang den Unterschied zwischen g(2) und G(2), wenn die untersuchte Zufallsvariable die Anzahl der defekten Leitstellen angibt.

3) Ermittle, wie viele Lötstellen überprüft werden müssen, damit mit mindestens 85%iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine defekte Lötstelle gefunden wird.

8.111 Ein Glücksrad ist in 16 gleich große Sektoren unterteilt, die von 1 bis 16 durchnummeriert sind. Das Glücksrad wird ein Dutzend Mal gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass **AB**
1) genau 2-mal die Zahl 10 angezeigt wird.
2) mindestens 3-mal die Zahl 13 angezeigt wird.
3) mindestens 8-mal, aber höchstens 10-mal eine Primzahl angezeigt wird.

8.112 In einer Kugellagerproduktion sind 91 % der hergestellten Kugeln von Qualität I, der Rest von Qualität II. **AB**
1) Ermittle, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Packung von 100 Stück mindestens 80 Kugellager von Qualität I sind.
2) Berechne, wie viele Kugeln geprüft werden müssen, damit mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Kugellager von Qualität II gefunden wird.

8.113 Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft einen Skytram S172 mit 555 Sitzplätzen. Die Belegungsstatistik zeigt, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Man geht davon aus, dass 10 % der gebuchten Plätze kurzfristig storniert werden. Um besser ausgelastet zu sein, werden 600 Buchungen vorgenommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Überbuchung kommt. **AB**

8.114 Im Mittel leiden 8 von 100 Männern und 1 von 200 Frauen an Dyschromasie (Farbenfehlsichtigkeit). **AB**
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, unter 30 Männern höchstens einen farbenfehlsichtigen Mann anzutreffen.
b) Gib eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass von F Frauen mindestens x farbenfehlsichtig sind.

8.115 Im Jahr 2010 waren in Österreich von rund 276 000 Männern im Alter von 25 bis 29 Jahren rund 49 400 verheiratet. **ABC** **TE**
a) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn zufällig ausgewählten Männern aus dieser Altersgruppe
1) genau 2 verheiratet sind.
2) mindestens 3 verheiratet sind.
3) höchstens 2 verheiratet sind.
4) weniger als die Hälfte verheiratet ist.
5) die ersten 6 nicht verheiratet sind.
6) spätestens der 5. verheiratet ist.
b) Berechne, wie groß der Anteil an verheirateten Männern mindestens sein müsste, damit unter zehn zufällig ausgewählten Männern mit 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens zwei verheiratet sind.
c) Gib an, wie viele Männer ausgewählt werden müssen, damit mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mehr als zwei davon verheiratet sind.

8.116 Untersuchungen haben ergeben, dass in einer Stadt im Ortsgebiet 23 % aller männlichen Autolenker nicht angegurtet waren. **AB**
1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kontrolle unter zehn männlichen Autolenkern mehr als drei nicht angegurtet sind?
2) Wie groß müsste der Anteil an männlichen nicht angegurteten Lenkern mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, bei einer Kontrolle unter zehn männlichen Lenkern mindestens einen nicht angegurteten anzuhalten, mindestens 90 % beträgt?

8.4.2 Hypergeometrische Verteilung

C **8.117** In einem Gefäß befinden sich 5 grüne und 3 blaue Kugeln. Beschreibe, welchen Vorgang das Baumdiagramm jeweils darstellt.

A) Baumdiagramm: erste Stufe $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$; zweite Stufe $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$

B) Baumdiagramm: erste Stufe $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$; zweite Stufe $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}$

Viele Vorgänge lassen sich durch das Modell „**Ziehen ohne Zurücklegen**" beschreiben. In einer Menge mit N Elementen tragen M ein bestimmtes Merkmal. Aus dieser Menge wird eine Stichprobe vom Umfang n gezogen. Es soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, dass genau x der ausgewählten Elemente das gesuchte Merkmal tragen. Das mathematische Modell, das diese Situation beschreibt, ist die **hypergeometrische Verteilung**.

ZB: Für die Tombola einer Spendengala werden von einem Reisebüro zehn Städtereisen als Preise gespendet. Insgesamt werden 500 Lose verkauft. Herr Meier kauft fünf Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau eine Städtereise gewinnt?

X … Anzahl der Gewinne in den fünf gekauften Losen, x = 1 … ein Gewinn,
N = 500 … Gesamtanzahl der Lose, M = 10 … Anzahl der Preise,
n = 5 … Anzahl der gekauften Lose

$$P(X = 1) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{\text{1 Gewinn aus 10 Preisen und 4 Nieten aus 490 Nieten}}{\text{5 Lose aus 500 Losen}}, \text{ also}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{\text{10 Preise}}{\text{1 Gewinn}} \cdot \binom{\text{490 Nieten}}{\text{4 Nieten}}}{\binom{\text{500 Lose}}{\text{5 Lose}}} = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{490}{4}}{\binom{500}{5}} = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 0{,}0929... \approx 9{,}3\,\%$$

Hypergeometrische Verteilung

$$g(x; N, M, n) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}; \quad \text{Varianz } V(x) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

N … Grundgesamtheit
M … Anzahl der Elemente mit besonderem Merkmal
n … Stichprobenumfang
x … Anzahl der Elemente mit dem gesuchten Merkmal in der Stichprobe

Ist der Stichprobenumfang n sehr klein im Verhältnis zur Grundgesamtheit N, so ändert sich durch das Ziehen ohne Zurücklegen der Anteil p, mit dem ein bestimmtes Merkmal auftritt, in einem vernachlässigbar geringen Ausmaß. Die hypergeometrische Verteilung kann dann durch die Binomialverteilung angenähert werden.

Um diese Näherung sinnvoll verwenden zu können, gilt als Richtwert: $n < \frac{N}{10}$

Technologieeinsatz: Hypergeometrische Verteilung

Excel, TI-Nspire: www.hpt.at

Mathcad

Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x)$ … **dhypergeom(x,M,N−M,n)**
Verteilungsfunktion $P(X \leq x)$ … **phypergeom(x,M,N−M,n)**

GeoGebra

Im Menü **Ansicht**, **Wahrscheinlichkeitsrechner** kann unter **Verteilung** die **Hypergeometrische Verteilung** gewählt werden. Mithilfe des Symbols kann die Wahrscheinlichkeitsfunktion oder die Verteilungsfunktion gewählt werden. Die Grundgesamtheit wird bei **Anzahl**, die Anzahl der Merkmalsträger bei n und die Größe der Stichprobe bei **Stichprobe** eingegeben. Mit den Symbolen wird der Bereich für die Zufallsvariable gewählt.

8.118 In Schottland ist der Anteil rothaariger Menschen weltweit am höchsten. Eine Haarshampoo-Firma verlost unter 1 000 schottische Bewerberinnen 50 Auftritte in Werbefilmen. 140 der Bewerberinnen sind rothaarig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 10 rothaarige Frauen ausgelost werden?

AB TE

1) Rechne mit der hypergeometrischen Verteilung.
2) Rechne näherungsweise mit der Binomialverteilung.
3) Vergleiche die Ergebnisse aus ***1)*** und ***2)***.

Lösung mit GeoGebra:
X … Anzahl der rothaarigen Frauen

1) Hypergeometrische Verteilung:
$N = 1\,000,\ M = 140,\ n = 50,\ x = 10$

$$P_H(X = 10) = \frac{\binom{140}{10} \cdot \binom{1\,000 - 140}{50 - 10}}{\binom{1\,000}{50}} = 0{,}07095...$$

Hypergeometrisch
Anzahl 1000 n 140 Stichprobe 50
P(10 ≤ X ≤ 10) = 0.07095

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei rund 7,10 %.

2) Binomialverteilung:

$p = \frac{M}{N} = 0{,}14$ und $50 < \frac{1\,000}{10}$

$$P_B(X = 10) = \binom{50}{10} \cdot 0{,}14^{10} \cdot 0{,}86^{40} = 0{,}07126...$$

Binomial
n 50 p 0.14
P(10 ≤ X ≤ 10) = 0.07127

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei rund 7,13 %.

3) Die Werte unterscheiden sich um rund 3 Zehntausendstel.

8.119 In eine Schulklasse gehen 15 Burschen und 4 Mädchen. Es werden 3 Personen zufällig ausgewählt.

AB

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ausgewählten Personen
1) mindestens ein Bursch ist.
2) mehr Burschen als Mädchen sind.
3) genau 2 Mädchen sind.
4) nur Mädchen sind.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

AB **8.120** Aus Versehen wurden in einen Karton mit 45 Leuchtdioden fünf defekte Dioden geworfen. Jemand entnimmt drei Leuchtdioden. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass

1) alle drei defekt sind.
2) genau zwei defekt sind.
3) keine defekt ist.
4) genau eine defekt ist.

ABC **8.121** In einer Schachtel liegen 30 Batterien, 6 davon sind „leer". Es werden 12 Batterien entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

1) alle „voll" sind.
2) lediglich zwei „leer" sind.
3) mindestens 7 „voll" sind.
4) gar keine „volle" dabei ist.

AB **8.122** Auf einem großen Bauernmarkt gibt es 250 Marktstände, davon verkaufen 15 Blumen. Das Marktamt prüft zehn Stände. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fünftel der geprüften Stände Blumen verkauft?

1) Rechne genau mit der hypergeometrischen Verteilung.
2) Rechne näherungsweise mit der Binomialverteilung.
3) Ermittle den relativen Fehler.

AB **8.123** Berechne, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, beim Lotto „6 aus 45" mit einem Tipp

a) drei Zahlen richtig zu tippen.
b) einen Fünfer mit Zusatzzahl zu tippen.

AB **8.124** Eine Firma, die klinische Studien durchführt, testet ein neues Medikament an 500 Personen. Die Hälfte davon erhält ein Präparat mit dem neuen Wirkstoff, die andere Hälfte ein Medikament mit dem bewährten Wirkstoff. Nach drei Wochen wird eine Kontrolluntersuchung an 20 zufällig ausgewählten Personen vorgenommen. Berechne die unten angegebene Wahrscheinlichkeit:

1) Rechne mit der hypergeometrischen Verteilung.
2) Rechne näherungsweise mit der Binomialverteilung.
3) Ermittle den relativen Fehler.
a) Genau 10 Personen testen den neuen Wirkstoff.
b) Mindestens 2 Personen testen den neuen Wirkstoff.
c) Höchstens 5 Personen nehmen das bewährte Medikament ein.

ABCD **8.125** Die deutsche „Glücksspirale" ist ebenso wie die österreichische „Jokerzahl" eine Nummernlotterie, bei der die Ziffern einer Zahl einzeln gezogen werden. Die Gewinnzahl der Glücksspirale hat sieben Stellen, die bei den ersten Ausspielungen Ende der 1960er Jahre wie folgt bestimmt wurden:
In einer einzigen großen Trommel befanden sich je sieben Kugeln mit den Ziffern von Null bis Neun, also insgesamt 70 Kugeln, von denen sieben gezogen wurden. Eine gezogene Kugel wurde nicht wieder in die Trommel zurückgelegt. Die Verantwortlichen argumentierten, dass die Wahrscheinlichkeit für jede siebenstellige Zahl gleich hoch sei, da jede Ziffer gleich oft vorhanden ist.

1) Argumentiere, warum diese Aussage falsch ist.
2) Recherchiere, wie die Ziehung heute in Deutschland durchgeführt wird.
3) Berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass die Gewinnzahl 0000000 lautet, für das ursprüngliche und das korrigierte Verfahren. Vergleiche die Ergebnisse.

8.4.3 Poisson-Verteilung

8.126 Schneide einen Rosinenstriezel in beliebig viele, annähernd gleich breite Scheiben. Zähle die Rosinen in jeder Scheibe. Gib an, wie viele Rosinen im Mittel in jeder Scheibe sind.

Eine weitere diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist nach dem französischen Physiker Siméon Poisson (1781 – 1840) benannt. Die **Poisson-Verteilung** wird als Modell für die Anzahl von **Ereignissen**, die **pro Einheit** zufällig, unabhängig und mit einem **konstanten Mittelwert** μ auftreten, verwendet (ZB: Anzahl der Strickfehler pro Pullover). Diese Anzahl ist eine vom Zufall abhängige Zufallsvariable.

Poisson konnte zeigen, dass für eine solche Zufallsvariable gilt: $P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$

Der Mittelwert μ ist der einzige Parameter der Poisson-Verteilung. Sowohl der Erwartungswert E(X) als auch die Varianz V(X) haben denselben Wert wie μ.

Die Herleitung erfolgt als Grenzfall der Binomialverteilung mit $n \to \infty$, $p \to 0$ und $n \cdot p = \mu$. Die Poisson-Verteilung wird deshalb auch als Näherung der Binomialverteilung verwendet, wenn $p \leq 0{,}05$ und $n \geq 50$ gilt. Man bezeichnet sie auch als **Verteilung der seltenen Ereignisse**.

Poisson-Verteilung

$g(x; \mu) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$ für $x \in \mathbb{N}$ $\qquad \mu = E(X) = V(X)$

Eine weitere in der Praxis wichtige Eigenschaft ist, dass die Summe von poissonverteilten Zufallsvariablen ebenfalls poissonverteilt ist, wobei sich die Mittelwerte addieren.

Additionssatz der Poisson-Verteilung
Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ sind poissonverteilt mit den Mittelwerten $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$.
Dann ist auch die Summe $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ poissonverteilt mit dem Mittelwert
$\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$.

Technologieeinsatz: Poisson-Verteilung

TE — GeoGebra, TI-Nspire: www.hpt.at

Tabellenkalkulationsprogramm (zB: Excel 2010)
Zur Berechnung steht die Funktion **POISSON.VERT(x;μ;k)** zur Verfügung. k steht für kumuliert. Ist k = 0, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsfunktion, ist k = 1 die Verteilungsfunktion.

8.127 An einem Helpdesk werden im Schnitt 1,4 Anfragen pro Minute registriert. Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass folgende Anzahl an Anfragen eingeht:

1) mehr als zwei in einer Minute ***2)*** höchstens 100 in einer Stunde

AB TE

Lösung mit Excel:

1) $\mu = 1{,}4$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}8334... =$
$= 0{,}1665...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 16,7 %.

Funktionsargumente
POISSON.VERT
X: 2 = 2
Mittelwert: 1,4 = 1,4
Kumuliert: 1 = WAHR
= 0,833497738

2) $\mu_{1\,\text{Stunde}} = \mu_{1\,\text{Minute}} \cdot 60 = 1{,}4 \cdot 60 = 84$

$P(X \leq 100) = 0{,}9610...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 96,1 %.

	A	B	C
1			
2	μ =	84	
3	x =	100	
4	P =	=POISSON.VERT(B3;B2;1)	

	A	B
1		
2	μ =	84
3	x =	100
4	P =	0,96108117

B **8.128** In einem bestimmten Gebiet der USA gibt es im Mittel fünf Tornados pro Jahr.

1) Berechne, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass es im nächsten Jahr in diesem Gebiet sechs Tornados geben wird.

2) Stelle g und G grafisch dar und veranschauliche jeweils $P(4 \leqslant X \leqslant 6)$, wenn X die Anzahl der Tornados pro Jahr angibt.

AB **8.129** Bei einer Autovermietung werden im Mittel 23,6 Autos pro Tag vermietet. Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Tag folgende Anzahl vermietet wird:

a) 22 oder weniger
b) 23 bis 27
c) keines
d) genau 10

AB **8.130** In einem Bürohaus aus Stahlbeton wird die elektromagnetische Strahlung so abgeschirmt, dass Smartphones zeitweise einen schlechten Empfang haben. Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass die Anzahl der Störungen poissonverteilt ist mit einem Mittelwert $\mu = 1{,}2$ Störungen pro Stunde. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde

1) keine Störung auftritt.
2) mehr als zwei Störungen auftreten.

AB **8.131** In einer Telefonzentrale gehen im Schnitt sechs Anrufe in zehn Minuten ein. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 11:30 Uhr und 11:40 Uhr

1) genau neun Anrufe eingehen.
2) mindestens vier Anrufe eingehen.
3) mehr als drei Anrufe eingehen.
4) zwischen neun und zwölf Anrufe eingehen.

AB **8.132** Bei einer Versicherungsgesellschaft weiß man aus Erfahrung, dass im Mittel 21 ‰ der Versicherten pro Jahr in einen Unfall verwickelt sind. Eine Filiale betreut 3 000 Kunden. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Kunden während eines Jahres in einen Unfall verwickelt werden.

ABD **8.133** Eine Maschine verpackt Büroklammern. Eine Packung enthält im Mittel 5 fehlerhafte Klammern.

1) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung höchstens 3 fehlerhafte Klammern sind.

2) Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass in 3 Packungen insgesamt mindestens 15 fehlerhafte Klammern zu finden sind.

3) Erkläre, welche Wahrscheinlichkeit mit dem Ausdruck $1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{5^x}{x!} \cdot e^{-5}$ berechnet wird.

ABC **8.134** Bei einem Job-Vermittlungsbüro gehen üblicherweise im Mittel acht Anfragen pro Stunde ein.

1) Schätze, welches Ereignis wahrscheinlicher ist:
8 Anrufe in der Stunde oder 64 Anrufe an einem 8-Stunden-Tag.

2) Berechne die Wahrscheinlichkeiten aus **1)** und interpretiere das Ergebnis.

ABD **8.135** In einer Serviceabteilung eines Elektrohändlers geht man bei der Erstellung der Dienstpläne davon aus, dass die Serviceleistung „Prozessortausch" im Mittel siebenmal pro Monat nachgefragt wird.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat weniger als fünfmal nach einem Prozessortausch verlangt wird.

2) Erstelle eine Tabelle für die Werte der Verteilungsfunktion von $x = 0$ bis $x = 13$.

3) Argumentiere anhand der Werte aus **2)**, wie viele Nachfragen man nach einem Prozessortausch bei der Planung berücksichtigen muss, wenn die Wahrscheinlichkeit, zu wenig eingeplant zu haben, unter 5 % liegen soll.

Vermischte Aufgaben zu diskreten Verteilungen

8.136 Bei der Erzeugung von Platinen rechnet man mit einem Ausschuss von 6 %. ABC

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Stichprobe von 30 Platinen
a) genau 4 **b)** mindestens 2 aber höchstens 6 **c)** mehr als 5 Platinen
Ausschuss sind.

2) Die Erzeugerfirma rechnet damit, dass von den verkauften Platinen 10 % innerhalb der Garantiezeit repariert werden müssen. Ermittle, wie groß eine zufällig ausgewählte Stichprobe mindestens sein muss, damit mit 95%iger Sicherheit mindestens eine Platine in dieser Zeit ein Reparaturfall wird.

8.137 In einem Bahnhof werden die an Samstagnachmittagen eintreffenden Einzelreisenden und Familien gezählt. In einer Minute treffen im Mittel 7,5 Einzelpersonen und zwei Familien ein. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass AB

1) in der folgenden Minute sechs oder weniger Einzelreisende eintreffen.

2) in der folgenden Minute drei oder mehr Familien eintreffen.

8.138 In einem Rechenzentrum wird die Speicherkapazität von Festplatten überprüft. Erfahrungsgemäß weiß man, dass nach drei Jahren 15% der Festplatten die erforderliche Speicherkapazität nicht mehr erfüllen. Eine Technikerin wählt zufällig 10 Festplatten aus, die drei Jahre alt sind. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ausgewählten mindestens 4 Festplatten mit einer zu geringen Speicherkapazität sind. AB

8.139 Das bekannteste Blutgruppensystem mit den Gruppen A, B, AB und 0 wurde von Karl Landsteiner (österreichischer Arzt, 1868 – 1943, Nobelpreis 1930) entwickelt. Er entdeckte auch die nach Rhesusaffen benannten Rhesusfaktoren „Rh+" und „Rh–". Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeiten des Auftretens von vier dieser Blutgruppen bei AB

Blutgruppe	AB, Rh–	B, Rh+	A, Rh+	0, Rh+
Anteil	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

1) unter 50 Personen genau zehn mit der Blutgruppe B, Rh+ sind.

2) unter 10 Personen höchstens eine Person mit der Blutgruppe AB, Rh– ist.

3) unter 30 Personen mindestens 15 Personen mit der Blutgruppe 0, Rh+ sind.

b) Ermittle, wie viele Spender man mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine Person mit der Blutgruppe AB, Rh– zu finden.

8.140 In einer Produktion von 100 Smartphones sind im Mittel 5 defekt. Bei einer Qualitätskontrolle werden 10 Smartphones getestet. AB

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei Smartphones unter den getesteten defekt sind.

2) Gib eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass mindestens vier defekte Smartphones unter den geprüften sind.

3) Ermittle, wie viele Smartphones mindestens getestet werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens ein defektes Smartphone dabei ist.

8.5 Normalverteilung und andere stetige Verteilungen

8.5.1 Grundbegriffe

In Abschnitt 8.4 wurde mit diskreten Verteilungen gearbeitet. Dabei nehmen Zufallsvariablen nur bestimmte Werte an. **Stetige Zufallsvariablen**, wie zum Beispiel Gewicht, Länge, Wartezeit usw. können in einem gewissen Bereich jeden beliebigen Wert annehmen, die zugehörige Größe ist also eine Messgröße und keine Zählgröße.

8.141 An einer HTL tragen 15 % aller Studierenden eine Brille. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter 200 zufällig ausgewählten Studierenden dieser Schule genau 0, 1, ..., 60 eine Brille tragen. Stelle diese Verteilung mithilfe eines Säulendiagramms dar. Beschreibe das Diagramm.

Das Verhalten einer diskreten Zufallsvariablen wird mithilfe der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. der daraus ermittelbaren Verteilungsfunktion beschrieben. Anhand des folgenden Beispiels wird nun erläutert, warum für stetige Zufallsvariablen anstelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion die so genannte **Dichtefunktion**, auch **Wahrscheinlichkeitsdichte** genannt, verwendet werden muss.

In einer U-Bahn-Station fährt pünktlich alle fünf Minuten ein Zug ab. Die Wartezeit, mit der eine am Bahnsteig eintreffende Person rechnen muss, ist eine stetige Zufallsvariable X. Sie kann Werte zwischen 0 Minuten und 5 Minuten annehmen. Wegen der regelmäßigen Abfahrt der Züge ist jede Wartezeit in diesem Bereich gleich wahrscheinlich, man spricht daher von Gleichverteilung.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von X in einem **bestimmten Zeitintervall** liegt, wird durch die **Fläche unter der Funktion g** in diesem Intervall angegeben. Die Funktion g ist eine stetige Funktion, die Dichtefunktion, da X stetig ist. Da die Wartezeit mit Sicherheit zwischen 0 Minuten und 5 Minuten liegt, muss die **Gesamtfläche** im Intervall [0; 5] **gleich 1** sein. Die Funktion g ist wegen der Gleichwahrscheinlichkeit aller Wartezeiten eine konstante Funktion mit $g(x) = \frac{1}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit für zB eine Wartezeit zwischen 2 Minuten und 2,5 Minuten entspricht nun der Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall [2; 2,5] und beträgt $\frac{1}{10}$.

Die **Verteilungsfunktion G** gibt die Wahrscheinlichkeit für eine Wartezeit von **höchstens** x Minuten an. Die Verteilungsfunktion entspricht daher der Fläche bis zum Wert x, also hier dem Integral der Dichtefunktion von 0 bis x. Zum Beispiel entspricht G(2) der Wahrscheinlichkeit, höchstens 2 Minuten warten zu müssen. Die Wahrscheinlichkeit für eine Wartezeit zwischen 2 Minuten und 2,5 Minuten ist daher die Differenz $G(2,5) - G(2)$ und beträgt $\frac{1}{10}$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Wartezeit von **exakt 2 Minuten** ist null. Im Bereich von 0 bis 5 Minuten liegen nämlich unendlich viele mögliche Wartezeiten, jeder einzelne Wert hat daher die Wahrscheinlichkeit „$\frac{1}{\infty}$“, also null. Das bedeutet allerdings nicht, dass die U-Bahn nie nach exakt 2 Minuten kommen wird. Im Unterschied zu diskreten Verteilungen bedeutet bei stetigen Verteilungen $P(X) = 0$ **nicht**, dass es sich um ein **unmögliches Ereignis** handelt.

Für eine stetige Zufallsvariable X gilt:
Verteilungsfunktion G: $P(X \leq x) = G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$
Die Funktion **g** wird **Dichtefunktion** genannt.

Die wichtigste stetige Verteilung ist die nach Carl Friedrich Gauß benannte **Gauß'sche Normalverteilung**. Sie ist in der Statistik von großer Bedeutung, da viele stetige Zufallsvariablen von Natur aus (annähernd) normalverteilt sind. Die Dichtefunktion der Normalverteilung hat eine charakteristische Glockenform, die **Gauß'sche Glockenkurve** genannt wird.

Wirken auf eine Zufallsgröße viele voneinander unabhängige Einflussgrößen ein, so ist die Zufallsgröße (annähernd) normalverteilt. Dies kann zum Beispiel durch ein so genanntes **Galton-Brett**, benannt nach Francis Galton (britischer Naturforscher, 1822 – 1911), veranschaulicht werden. Dabei fallen Kugeln aus einem Trichter durch ein System von Nagelreihen in Schächte. Die Nägel symbolisieren die unabhängigen Einflussgrößen. Die Kugeln verteilen sich nun so, dass man die Form einer Glocke erkennen kann.

Die Verteilung der Kugeln in den Schächten des Galton-Bretts lässt sich durch eine Binomialverteilung mit p = 0,5 beschreiben. Je größer n ist, umso besser kann man die Näherung an die Gauß'sche Glockenkurve erkennen.

n = 20, p = 0,50

n = 50, p = 0,50

n = 200, p = 0,50

Die Normalverteilung verdankt ihre große Bedeutung in der Praxis dem **zentralen Grenzwertsatz**. Vereinfacht formuliert besagt dieser, dass jede Zufallsgröße, die sich als Summe sehr vieler unabhängiger Zufallsgrößen zusammensetzt, annähernd normalverteilt ist.

Man erhält die Funktionsgleichung der **Dichtefunktion der Normalverteilung**, indem man bei der Binomialverteilung den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführt:

$$g(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Merkmale und Eigenschaften der Glockenkurve:

- Der Parameter μ ist der **Erwartungswert** der Verteilung. Der Graph hat an der Stelle μ ein Maximum.
- Der Graph ist **symmetrisch** zur senkrechten Achse durch μ.
- Der Parameter σ entspricht der **Standardabweichung** der Verteilung. Die Wendestellen des Funktionsgraphen liegen symmetrisch zum Erwartungswert bei $x = \mu \pm \sigma$. Die Wendetangenten schneiden die waagrechte Achse bei $x = \mu \pm 2\sigma$.
- Die Standardabweichung σ ist für die „Breite der Glocke" bestimmend. Da die Gesamtfläche unter einer Dichtefunktion immer den Wert 1 hat, sind Glockenkurven mit kleinem σ höher und schmäler als solche mit großem σ.
- Für $x \to \pm \infty$ nähert sich der Funktionsgraph asymptotisch der waagrechten Achse.

W W x

μ−2σ μ−σ μ μ+σ μ+2σ

σ=1,2 σ=2 σ=4 x

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$G(x_0)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die normalverteilte Zufallsvariable X einen Wert von höchstens x_0 annimmt. Sie wird durch den Flächeninhalt unter der Glockenkurve von $-\infty$ bis x_0 ermittelt. x_0 kann jeden beliebigen Wert annehmen, man erhält die **Verteilungsfunktion** G.

$$G(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt$$

Gauß'sche Normalverteilung N(μ, σ)

Dichtefunktion: $g(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Verteilungsfunktion: $G(x;\mu,\sigma) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt$

Zentraler Grenzwertsatz
Die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

C **8.142** Die Grafik zeigt die Verteilungsfunktion G einer normalverteilten Größe.
1) Lies den Erwartungswert ab.
2) Kennzeichne jenen Wert x der Zufallsvariablen X, für den gilt: $P(X \leq x) = 80\,\%$.

C **8.143** Kreuze die richtige Aussage an.

a) Der Parameter σ einer Gauß'schen Glockenkurve entspricht …

… der Höhe des Wendepunkts.	☐
… der Höhe des Extrempunkts.	☐
… der waagrechten Entfernung zwischen Extremstelle und Wendestelle.	☐
… der waagrechten Entfernung zwischen den Wendepunkten.	☐
… der Lage des Extrempunkts.	☐

b) Wenn der Parameter σ einer Normalverteilung halbiert wird, dann …

… verdoppelt sich der Erwartungswert.	☐
… halbiert sich der Erwartungswert.	☐
… halbiert sich der Flächeninhalt unter der Kurve.	☐
… verdoppelt sich der Flächeninhalt unter der Kurve.	☐
… bleibt der Flächeninhalt unter der Kurve gleich.	☐

C **8.144** In nebenstehender Grafik sind Normalverteilungen mit unterschiedlichen Parametern dargestellt.
1) Lies die jeweiligen Werte für μ ab.
2) Ordne den Kurven jeweils den richtigen Wert des Parameters σ zu.

A) σ = −2 C) σ = 0,5 E) σ = 1,5
B) σ = 0 D) σ = 1 F) σ = 2

BC **8.145** Diskutiere die Dichtefunktion der Normalverteilung mit den angegebenen Parametern.
a) μ = 2, σ = 0,5 **b)** μ = 100, σ = 3 **c)** μ = −1,5, σ = 0,8

8.5.2 Die Standardnormalverteilung – Theoretische Grundlagen

Von besonderer Bedeutung ist die Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Diese wird **Standardnormalverteilung** bzw. **standardisierte Normalverteilung** genannt.
Um die Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsvariablen zu berechnen, muss das Integral der Verteilungsfunktion berechnet werden. Für dieses Integral existiert keine Stammfunktion, daher können die Werte nur numerisch ermittelt werden. Früher war man dabei auf Tabellen angewiesen, in denen die Werte der standardisierten Normalverteilung aufgelistet sind.
Um eine beliebige Normalverteilung in die Standardnormalverteilung umzurechnen, muss eine **lineare Transformation** durchgeführt werden. Die Transformation wird auch heute noch benötigt, um Umkehraufgaben (Berechnung von μ und σ) zu lösen.

Für die Standardnormalverteilung sind folgende **Bezeichnungen** üblich:
Zufallsvariable: U
Dichtefunktion: $\varphi(u)$
Verteilungsfunktion: $\Phi(u)$

Um die Werte der Verteilungsfunktion $G(x; \mu, \sigma)$ einer beliebigen Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ mithilfe der Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ ermitteln zu können, wendet man eine **Koordinatentransformation** an:

$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ … Standardisierungsformel

- Die senkrechte Achse wird in den Erwartungswert μ verschoben.
  Das entspricht dem **Subtrahieren von μ**.
- Die Skalierung der u-Achse wird so gewählt, dass die Standardabweichung $\sigma = 1$ ist.
  Das entspricht der **Division durch σ**.

Da die Fläche unter der Kurve unverändert gleich 1 bleibt, hat im transformierten Koordinatensystem auch die senkrechte Achse eine veränderte Skalierung.

ZB:
Normalverteilung mit $\mu = 4, \sigma = 0{,}5$ Standardnormalverteilung N(0, 1)

g(x)
0,8
x
2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5

Koordinaten-transformation
$u = \frac{x-4}{0{,}5}$

φ(u)
0,4
u
–3 –2 –1 0 1 2 3

Standardnormalverteilung N(0, 1)

Dichtefunktion: $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$

Verteilungsfunktion: $\Phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

Standardisierungsformel: $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Im Folgenden wird das Ablesen von Werten aus der Normalverteilungstabelle (siehe Seite 310) erklärt.

- Ermitteln von $\Phi(u)$ bei gegebenem u:
  In der ersten Spalte der Tabelle sind die u-Werte in Zehntelschritten angegeben. Die weiteren Spalten der passenden Zeile entsprechen den jeweiligen Werten der Hundertstelstelle von u.
  ZB: $\Phi(\mathbf{0{,}12}) = \mathbf{0{,}54776}$
  Die standardnormalverteilte Zufallsvariable U nimmt mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 54,78 % einen Wert von höchstens u = 0,12 an.

u	0	1	2	
0,00	0,50000	50399	50798	5
0,10	53983	54380	54776	5
0,20	57926	58317	58706	5
0,30	61791	62172	62552	6

u	0	1	2	
1,10	86433	86650	86864	8
1,20	88493	88686	88877	8
1,30	90320	90490	90658	9

- Um u bei gegebenem $\Phi(u) = p$ zu ermitteln, sucht man in der Tabelle jenen Wert u_p, der sich von der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit am wenigsten unterscheidet. u_p wird **Quantil** oder **Schwellenwert** genannt.
  ZB: $\Phi(u) = 0{,}8885...$
  nächstliegender Tabellenwert: **0,88877** $\Rightarrow u \approx$ **1,22**

88,85%
$u_{0,8885} \approx 1{,}22$

Die im Folgenden angeführten grundlegenden Zusammenhänge und Eigenschaften werden für die standardisierte Normalverteilung angeführt, gelten jedoch (sinngemäß) für jede beliebige Normalverteilung.

- $\mathbf{P(U \leqslant u) = \Phi(u)}$ kann durch die färbig unterlegte Fläche („links von u") veranschaulicht werden.
  Die färbige Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable U einen Wert kleinergleich u (also höchstens u) annimmt.
  Da $P(U = u) = 0$ ist, gilt: $P(U \leqslant u) = P(U < u)$

- $\mathbf{P(U \geqslant u) = 1 - \Phi(u)}$
  Die weiße Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable U einen Wert größergleich u (also mindestens u) annimmt.

- Aufgrund der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
  $\mathbf{\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)}$
  Da in den Tabellen im Allgemeinen nur positive Werte von u enthalten sind, muss $\Phi(u)$ für negative Werte von u aufgrund der Symmetrie ermittelt werden.
  ZB: $\Phi(-0{,}41) = 1 - \Phi(0{,}41) = 1 - 0{,}65910 = 0{,}34090$

- $\mathbf{P(u_1 \leqslant U \leqslant u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1)}$ entspricht der Fläche zwischen u_1 und u_2.
  Die färbige Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable U einen Wert zwischen u_1 und u_2 annimmt.

8.146 Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 3{,}5$ und $\sigma = 2$. Ermittle mithilfe einer Normalverteilungstabelle, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable einen Wert größer als 4,7 annimmt.

BC

Lösung:

$u = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4{,}7 - 3{,}5}{2} = 0{,}6$

$\Phi(0{,}6) = 0{,}72575$

$P(U > 0{,}6) = 1 - \Phi(0{,}6) = 1 - 0{,}72575 = 0{,}27425 \approx 27{,}43\ \%$

Die Zufallsvariable X nimmt mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 27,43 % einen Wert von mehr als 4,7 an.

u	0
0,00	0,50000
0,10	53983
0,20	57926
0,30	61791
0,40	65542
0,50	0,69146
0,60	72575
0,70	75804

Aufgaben 8.147 – 8.149: Arbeite mit einer Normalverteilungstabelle.

8.147 Ermittle $\Phi(u)$. ***1)*** $u = 2{,}4$ ***2)*** $u = -2{,}4$ ***3)*** $u = 0{,}24$ ***4)*** $u = -0{,}244$ — C

8.148 Ermittle u. ***1)*** $\Phi(u) = 0{,}857$ ***2)*** $\Phi(u) = 0{,}936$ ***3)*** $\Phi(u) = 0{,}421$ ***4)*** $\Phi(u) = 0{,}199$ — BC

8.149 Ermittle die gesuchte Wahrscheinlichkeit. — BC

a) $P(X \geq 560)$ für $\mu = 500$; $\sigma = 45$
b) $P(X \leq 28)$ für $\mu = 30$; $\sigma = 1{,}9$
c) $P(-0{,}6 < X < -0{,}45)$ für $\mu = -0{,}5$; $\sigma = 0{,}08$
d) $P(X > 51)$ für $\mu = 55$; $\sigma = 2{,}5$

8.5.3 Berechnungen mithilfe der Normalverteilung

Berechnungen können auch technologieunterstützt durchgeführt werden.

TE — GeoGebra, Mathcad, Excel: www.hpt.at

Technologieeinsatz: Normalverteilung
TI-Nspire

Im Menü **5: Wahrscheinlichkeit**, **5: Verteilungen** stehen folgende Funktionen zur Verfügung:

- **normPdf(x,μ,σ)** … Dichtefunktion der Normalverteilung

Normal Pdf — X-Wert: 17; μ: 15; σ: 3; OK Abbruch

normPdf(17,15,3) 0.106483

Mithilfe der Funktionswerte der Dichtefunktion kann die Glockenkurve gezeichnet werden.

- **normCdf(x_{unten},x_{oben},μ,σ)** … Verteilungsfunktion der Normalverteilung

Normal Cdf — Untere Schranke: -∞; Obere Schranke: 17; μ: 15; σ: 3; OK Abbruch

normCdf(-∞,17,15,3) 0.747508

Die Funktion gibt die Wahrscheinlichkeit $G(x_{oben}) - G(x_{unten})$ an.

- **invNorm(Fläche,μ,σ)** … Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion

Inverse Normalverteilung — Fläche: 0.8; μ: 15; σ: 3; OK Abbruch

invNorm(0.8,15,3) 17.5249

Der für „Fläche" eingegebene Wert entspricht der Fläche **links** vom gesuchten x-Wert. Wählt man $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, erhält man u_p.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Viele Messgrößen, wie zum Beispiel der Durchmesser von Schrauben oder die Füllmenge von Lebensmittelverpackungen, sind normalverteilt. Die Verteilungsfunktion berücksichtigt theoretische Werte von $-\infty$ bis ∞. Messgrößen nehmen in der Praxis nicht beliebig kleine oder große Werte an. Den weit vom Erwartungswert entfernten Werten kommen jedoch vernachlässigbar kleine Wahrscheinlichkeiten zu.

Es ergeben sich verschiedene Problemstellungen, die im Folgenden besprochen werden.

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Sind von einer Normalverteilung die Parameter **μ und σ bekannt**, so kann man mithilfe der Verteilungsfunktion $G(x; \mu, \sigma)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die normalverteilte **Zufallsvariable X in einem vorgegebenen Bereich** liegt, direkt ermitteln.

ZB: Die Länge von Salatgurken einer Sorte ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 28{,}4$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 2{,}6$ cm. Für eine zufällig ausgewählte Salatgurke soll Folgendes berechnet werden:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Salatgurke eine Länge von **höchstens** 30 cm hat:
  $P(X \leqslant 30 \text{ cm}) = G(30; 28{,}4, 2{,}6) = 0{,}7308... \approx 73{,}1\,\%$
  Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht dem färbigen Bereich links von 30 cm.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Salatgurke eine Länge von **mindestens** 25 cm hat:
  $P(X \geqslant 25 \text{ cm}) = 1 - G(25; 28{,}4, 2{,}6) = 1 - 0{,}0954... \approx 90{,}5\,\%$
  Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht dem färbigen Bereich rechts von 25 cm.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge **zwischen** 25 cm und 30 cm liegt:
  $P(25 \text{ cm} \leqslant X \leqslant 30 \text{ cm}) =$
  $= G(30; 28{,}4, 2{,}6) - G(25; 28{,}4, 2{,}6) = 0{,}6353... \approx 63{,}5\,\%$
  Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht dem färbigen Bereich zwischen 25 cm und 30 cm.

Berechnung eines bestimmten Werts x

Mithilfe der Umkehrfunktion (der inversen Funktion) der Verteilungsfunktion kann man zu einer **vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p** jenen Wert x berechnen, für den gilt: $P(X \leqslant x) = p$
Aus der Definition der Verteilungsfunktion ergibt sich, dass die angegebene Wahrscheinlichkeit durch die Fläche links vom gesuchten Schwellenwert symbolisiert wird.

ZB: Eine Abfüllanlage für Ölkanister arbeitet mit einem Erwartungswert von $\mu = 5$ Liter und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}09$ Liter.

- Welche Füllmenge enthalten 90 % der Kanister höchstens?
  $P(X \leqslant x) = 90\,\% \Rightarrow G(x; 5, 0{,}09) = 0{,}9,\ x = ?$
  Der zugehörige Schwellenwert lautet $x = 5{,}1153... \approx 5{,}115$.
  90 % der Kanister enthalten höchstens 5,115 Liter.

- Welche Füllmenge enthalten 95 % der Kanister mindestens?
  $P(X \geqslant x) = 95\,\% \Rightarrow P(X < x) = 5\,\%$
  $G(x; 5, 0{,}09) = 0{,}05 \Rightarrow x = 4{,}8519... \approx 4{,}852$
  95 % der Kanister enthalten mindestens 4,852 Liter.

Berechnung des Erwartungswerts μ bzw. der Standardabweichung σ

Sind bei einer Normalverteilung die Parameter μ bzw. σ unbekannt, können Berechnungen nicht direkt mit der Vereilungsfunktion $G(x; \mu, \sigma)$ durchgeführt werden sondern mithilfe der **Standardnormalverteilung**.

ZB: Ein Trinkwasserspender soll so eingestellt werden, dass auf Knopfdruck ca. 0,2 L Wasser abgefüllt werden. Man kann davon ausgehen, dass die Abfüllmenge annähernd normalverteilt ist. Die Standardabweichung beträgt 0,01 L. Eine Mindestabfüllmenge von 0,19 L als untere Toleranzgrenze darf in maximal 5 % der Fälle unterschritten werden. Ermittle, auf welchen Erwartungswert μ die Anlage eingestellt werden muss.

Zufallsvariable X … Abfüllmenge in Liter; $\sigma = 0{,}01$ L
Verteilungsfunktion für den gegebenen Zusammenhang:
$P(X \leqslant 0{,}19) \leqslant 0{,}05$
$G(0{,}19; \mu, 0{,}01) = 0{,}05$
Der Schwellenwert $u_{0,05}$ der Standardnormalverteilung wird ermittelt:
$u_{0,05} = -1{,}64485...$

5 %
x in L
0,19
μ = ?

Wird mit einer Tabelle gearbeitet, so gilt: $u_{0,05} = -u_{0,95}$

Mithilfe der Standardisierungsformel $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ erhält man:

$-1{,}64485 = \frac{0{,}19 - \mu}{0{,}01} \Rightarrow \mu = 0{,}20644... \approx 0{,}2064$ Liter

5 %
u
$u_{0,05}$
μ = 0

Abschätzungen über die Verteilung von normalverteilten Werten

Für eine Abschätzung über die Verteilung von Messwerten kann man generelle Überlegungen mithilfe der Standardnormalverteilung anstellen:

μ−σ μ μ+σ

$x_u = \mu - \sigma$

$u_u = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = -1$

$x_o = \mu + \sigma \Rightarrow u_o = 1$

$\Phi(1) - \Phi(-1) =$

$= 0{,}682... \approx 68$ %

Rund **68 % bzw. $\frac{2}{3}$** aller Werte liegen im Bereich **$\mu \pm \sigma$**.

μ−2σ μ μ+2σ

$x_u = \mu - 2\sigma$

$u_u = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} = -2$

$x_o = \mu + 2\sigma \Rightarrow u_o = 2$

$\Phi(2) - \Phi(-2) =$

$= 0{,}954... \approx 95$ %

Rund **95 %** aller Werte liegen im Bereich **$\mu \pm 2\sigma$**.

μ−3σ μ μ+3σ

$x_u = \mu - 3\sigma$

$u_u = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} = -3$

$x_o = \mu + 3\sigma \Rightarrow u_o = 3$

$\Phi(3) - \Phi(-3) =$

$= 0{,}997... \approx 99{,}7$ %

Rund **99,7 %** aller Werte, also praktisch **fast alle** Werte, liegen im Bereich **$\mu \pm 3\sigma$**.

Umgekehrt kann zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit ein um μ symmetrisch liegender Bereich angegeben werden. Häufig werden die folgenden Richtwerte verwendet:

90 %
μ−1,65σ μ μ+1,65σ

95 %
μ−1,96σ μ μ+1,96σ

99 %
μ−2,57σ μ μ+2,57σ

ABCD **8.150** In einem Unternehmen werden Spezialfolien für Sonnenschutzrollos zugeschnitten. Die Länge der fertig zugeschnittenen Bahnen ist normalverteilt mit einem Erwartungswert μ = 200 cm und einer Standardabweichung σ = 2,5 cm. Eine Folienbahn wird zufällig ausgewählt.

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge einer Folienbahn kleiner als 203 cm ist.
2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge größer als 196 cm ist.
3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge zwischen 195 cm und 205 cm liegt.
4) Welche Mindestlänge weisen 90 % aller Folienbahnen auf?
5) Jemand führt eine Berechnung durch. Er gibt als Ergebnis das Intervall [195,1 cm, 204,9 cm] an und die Bedeutung des ermittelten Bereichs im Sachzusammenhang.
$G(x_u; 200, 2{,}5) = 0{,}025$
$x_u \approx 195{,}1$ und $x_o \approx 200 + (200 - 195{,}1) = 204{,}9$
Erkläre, welcher Bereich berechnet wurde.

2,5 % 95 % 2,5 % x 195 200 205

6) Wie müsste σ bei gleichbleibendem μ eingestellt sein, damit 95% der Längen aller Folienbahnen im Intervall [198 cm; 202 cm] liegen?

Lösung:

1) $P(X < 203) = G(203; 200, 2{,}5) =$
$= 0{,}8849... \approx 88{,}5\ \%$
Rund 88,5 % aller Folienbahnen sind kürzer als 203 cm.

? x 200 203

- Die Wahrscheinlichkeit für eine Länge von genau 203 cm ist null, daher gilt: $P(X < 203) = P(X \leq 203)$

2) $P(X > 196) = 1 - P(X \leq 196)$
$= 0{,}94520... \approx 94{,}5\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Folienbahn länger als 196 cm ist, beträgt rund 94,5 %.

? x 196 200

3) $P(195 \leq X \leq 205) = G(205; 200, 2{,}5) - G(195; 200, 2{,}5) =$
$= 0{,}9772... - 0{,}02275... = 0{,}9544...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge einer Folienbahn zwischen 195 cm und 205 cm liegt, beträgt rund 95,4 %.

? x 195 200 205

4) $P(X \geq x_u) = 90\ \%$
$P(X < x_u) = 10\ \%$
$G_N(x_u; 200, 2{,}5) = 0{,}1$
$x_u = 196{,}79... \approx 196{,}8$ cm
90 % aller Folienbahnen sind mindestens 196,8 cm lang.

10 % 90 % x ? 200

- ZB: TI-Nspire

invNorm(0.1,200,2.5)	196.796

5) Es wurde der symmetrisch um μ liegende Bereich berechnet, in dem die Länge mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

6) $G(202) = 0{,}975$
$u_{0{,}975} = 1{,}95996...$
$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{x-\mu}{u} = \frac{202-200}{1{,}95996...} = 1{,}0204...$
Die Standardabweichung müsste auf rund 1,02 cm eingestellt sein.

8.151 Vervollständige die Sätze. AC

1) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsgröße kleiner als ... ist, beträgt 50 %.

2) Rund ... Prozent der Werte einer normalverteilten Zufallsgröße liegen im Bereich $\mu \pm 2\sigma$.

3) Rund 90 % aller Werte einer normalverteilten Zufallsgröße liegen im Bereich ... .

4) An den Stellen $x = \mu \pm \sigma$ befinden sich ... der Gauß'schen Glockenkurve.

8.152 Die Abfüllmenge x von griechischem Olivenöl der Marke Hermes ist normalverteilt mit $\mu = 0{,}75$ Liter und $\sigma = 0{,}045$ Liter. Erkläre, welche Wahrscheinlichkeit durch die gekennzeichnete Fläche dargestellt ist. CD

1) **2)** **3)** **4)**

8.153 In der Grafik sind die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Größe dargestellt. CD

1) Erkläre den mathematischen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen.

2) Schreibe die folgenden Ausdrücke jeweils in das richtige graue Feld:
a, b, $g(x_0)$, $G(x_0)$, $G(a)$, $G(b) - G(a)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$

8.154 10 % aller Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen sind kleiner als 5 und 10 % sind größer als 5,8. Gib den Erwartungswert dieser Verteilung an. AC

8.155 5 % aller Werte einer normalverteilten Zufallsgröße mit $\mu = 24$ sind kleiner als 20. Welchen Wert überschreiten dann die größten 5 % der Werte? Dokumentiere deine Überlegungen. AC

8.156 Theo und Jutta schätzen von der dargestellten Normalverteilung den Erwartungswert und den färbig markierten Prozentsatz. Beurteile die Schätzungen. C

Theo: $\mu = 425$; Fläche: 80 %

Jutta: $\mu = 430$; Fläche: 55 %

8.157 Die Masse einer Zierfischart ist normalverteilt mit $\mu = 50$ g. Zwei Drittel aller Fische haben eine Masse zwischen 45 g und 55 g. Kreuze die richtige Fortsetzung an. C
Eine Masse von weniger als 40 g haben daher rund...

... 10 % aller Fische.	☐
... 5 % aller Fische.	☐
... 2,5 % aller Fische.	☐
... 1 % aller Fische.	☐
... 0,5 % aller Fische.	☐

Wahrscheinlichkeitsrechnung

AB **8.158** Der Inhalt von Honiggläsern ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 460$ g und $\sigma = 4$ g. Ein Honigglas wird zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Fälle. Das Honigglas enthält

1) weniger als 450 g. **3)** 475 g oder mehr. **5)** 470 g oder weniger.
2) mehr als 454 g. **4)** zwischen 440 g und 480 g. **6)** mindestens 460 g.

ABC **8.159** Die gefällten Bäume eines Walds werden zum Weitertransport gescheitelt. Die Länge der Holzscheite ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 35$ cm und $\sigma = 2$ cm.

1) Wie viel Ausschuss ist zu erwarten, wenn ein Scheit maximal 40 cm lang sein darf?
2) Welche Länge unterschreiten 20 % aller Holzscheite?
3) In welchem symmetrisch um μ gelegenen Bereich liegt die Länge von 90 % aller Scheite?
4) Interpretiere die Grafik im Sachzusammenhang.

G(x)
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
26 28 30 32 34 36 38 40 42
x in cm

AB **8.160** Der Normverbrauch eines bestimmten Autotyps ist normalverteilt mit $\mu = 7{,}4$ Liter pro 100 km und $\sigma = 0{,}8$ Liter pro 100 km.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Auto einen Verbrauch von **1)** mehr als 10 Liter, **2)** weniger als 7 Liter, **3)** zwischen 7 und 8 Liter pro 100 km aufweist.

b) In welchem um μ symmetrischen Bereich schwankt der Verbrauch bei 90 % dieser Autos?

AB **8.161** Die Reißfestigkeit von Fäden ist normalverteilt mit $\sigma = 40\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

1) Wie groß ist der Erwartungswert, wenn 80 % der Fäden eine Reißfestigkeit von mehr als 200 $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ haben?
2) Gib die symmetrisch um μ gelegenen Grenzen an, innerhalb derer die Reißfestigkeit von 90 % aller Fäden liegt.

AB **8.162** Die Korngröße von Feinstaub variiert stark. In einer entnommenen Stichprobe liegen 90 % aller Staubpartikel in einem Bereich zwischen 2,5 µm und 4,0 µm. Wie groß ist die Standardabweichung, wenn man annimmt, dass die Partikelgröße normalverteilt ist und das gegebene Intervall symmetrisch um μ liegt?

ABD **8.163** Sauerstoff wird in Stahlflaschen abgefüllt, deren Entnahmemenge annähernd normalverteilt ist mit $\sigma = 10$ L. Der Hersteller gibt eine mittlere Entnahmemenge von 6 000 L an. Er möchte, dass 95 % der Flaschen eine Entnahmemenge von mindestens 5 990 L aufweisen.

1) Zeige, dass die Forderung des Herstellers nicht erfüllt ist, wenn $\mu = 6\,000$ L ist.
2) Erarbeite zwei verschiedene Änderungsvorschläge, sodass die Forderung erfüllt ist.

AB **8.164** 80 % aller Hühnereier eines Betriebs haben eine Masse zwischen 63 g und 73 g, sie sind deshalb für die Gewichtsklasse L geeignet. Berechne den prozentuellen Anteil der Hühnereier, die zur Gewichtsklasse S gehören, also unter 53 g haben. Gehe dabei von der Annahme aus, dass die Masse normalverteilt ist und der gegebene Bereich symmetrisch um den Erwartungswert liegt.

8.165 Der Durchmesser von DVDs ist normalverteilt mit μ = 12 cm und σ = 0,1 mm. AB

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser einer DVD außerhalb des Toleranzbereichs von $\mu \pm 0{,}3$ mm liegt.

2) Auf welchen Wert müsste σ verbessert werden, damit bei unverändertem Erwartungswert nur in 0,01 % der Fälle ein Durchmesser von weniger als 11,98 cm vorliegt?

8.166 Die Masse von 1,5-kg-Hanteln ist normalverteilt mit μ = 1,5 kg und σ = 2 dag. ABCD

1) Bei wie viel Prozent der Hanteln weicht die Masse um mehr als 4 dag von μ ab?

2) Bei einer Produktionsserie sollen (bei gleicher Standardabweichung) höchstens 1 % der Hanteln weniger als 1,47 kg haben. Bestimme den Erwartungswert dieser Produktionsserie.

3) Auf welchen Wert müsste man σ ändern, damit bei μ = 1,5 kg nur 1 % der Hanteln weniger als 1,47 kg wiegen?

4) Erkläre die Bedeutung der färbig markierten Fläche im Sachzusammenhang.

g(x)
x in kg
μ
x = 1,55

8.167 Der Erwartungswert für die Spannung in einem eingeschalteten Spotlight für die Wandbeleuchtung beträgt 230 V bei einer Standardabweichung von 8 V. AB

1) Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass die Spannung in einem eingeschalteten Spotlight außerhalb des Toleranzbereichs von $\mu \pm 24$ V liegt.

2) Es wäre wünschenswert, wenn nur in 0,01 % der Fälle eine Spannung von mehr als 255 V vorliegt. Gib die Standardabweichung an, die bei gleich bleibendem Erwartungswert dafür benötigt wird.

8.168 Bei der Einfahrt in eine Tiefgarage ist nach dem Knopfdruck die Ausgabezeit für das Ticket normalverteilt mit μ = 3 Sekunden und σ = 0,3 Sekunden. AB

1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt für ein Ticket die Ausgabezeit nach dem Knopfdruck nicht im Toleranzbereich von $\mu \pm 1$ Sekunden?

2) Auf welchen Wert muss man die Standardabweichung verbessern, damit bei unverändertem Erwartungswert nur bei 0,5 % der Tickets die Ausgabezeit länger als 3,5 Sekunden dauert?

8.169 In einer Hirseabfüllanlage werden Pakete abgefüllt. Auf dem Paket wird der Inhalt mit 1 kg angegeben. Die Abfüllmenge ist normalverteilt und hat einen Erwartungswert von 1,07 kg und eine Standardabweichung von 0,05 kg. AB

1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Paket weniger als 1 kg Hirse enthält?

2) In welchem um μ symmetrischen Bereich liegen 95,45 % der Abfüllmengen?

3) Gib an, auf welchen Erwartungswert die Anlage eingestellt werden muss, sodass bei unveränderter Standardabweichung nicht mehr als 4 % der Pakete einen geringeren Inhalt als angegeben aufweisen.

8.170 In einem Betrieb wird Holzleim in 0,5-Liter-Verpackungen abgefüllt. Dabei wird eine Füllmenge von 0,49 Liter bis 0,51 Liter toleriert. Von mehreren Prüfserien ist bekannt, dass in 3,1 % der Fälle die Füllmenge unterschritten und in 4,6 % der Fälle überschritten wird. Berechne unter der Annahme, dass die Füllmenge normalverteilt ist, den Erwartungswert und die Standardabweichung. AB

8.5.4 Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Bereits bei der Einführung der Normalverteilung wurde darauf hingewiesen, dass sich für große Werte von n die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Binomialverteilung der Dichtefunktion der Normalverteilung nähert. Falls p nahe bei 0,5 liegt, ist diese Näherung bereits für kleine n in der Praxis ausreichend gut und bringt deutliche Vereinfachungen bei Berechnungen mit sich.

Für große n lässt sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ nähern:

$$\mathbf{g_B(x; n, p) \approx g_N\left(x; n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}\right)}$$

Im Allgemeinen wird $\sqrt{\mathbf{n \cdot p \cdot (1 - p)}} > 3$ (bzw. $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$) als Voraussetzung für ausreichende Genauigkeit angegeben.

Die Näherung einer diskreten Verteilung durch eine stetige Verteilung erfordert eine Korrektur der Intervallgrenzen, die so genannte **Stetigkeitskorrektur**.

Stellt man die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung in Form eines Histogramms dar, dann entspricht die Fläche der Rechtecke mit der Breite 1 und der Höhe g(x) der Wahrscheinlichkeit.

Zum Beispiel stellen die dunkelgrünen Rechtecke die Wahrscheinlichkeit $P(3 \leqslant X \leqslant 5)$ exakt dar. Der Balken beim Wert 3 beginnt bei 2,5. Der Balken beim Wert 5 endet bei 5,5. Die Normalverteilung muss daher von 2,5 bis 5,5 ausgewertet werden.

2 2,5 3 4 5 5,5 6

Stetigkeitskorrektur
Bei Näherung einer diskreten Verteilung durch eine stetige Verteilung gilt:
$P(a \leqslant X \leqslant b) \approx G(b + 0{,}5) - G(a - 0{,}5)$

AB **8.171** Ein beliebtes Ausflugslokal hat 200 Sitzplätze. Aus Erfahrung weiß man, dass 85 % der Gäste, die telefonisch vorbestellt haben, auch tatsächlich kommen. Berechne mittels Binomialverteilung und mithilfe der Näherung durch die Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 Plätze frei bleiben, obwohl alle Plätze vorbestellt waren.

Lösung:
X … Anzahl der freien Plätze
Binomialverteilung: $n = 200$; $p = 0{,}15$
$P(X \geqslant 25) = 1 - G_B(200; 0{,}15, 24) = 0{,}8631... \approx 86{,}3\ \%$

Näherung durch Normalverteilung: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}15 = 30$

- Voraussetzungen überprüfen

$\sigma = \sqrt{\mathbf{n \cdot p \cdot (1 - p)}} = \sqrt{\mathbf{200 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} = \sqrt{25{,}5} > 3$

- Stetigkeitskorrektur

$P(25 \leqslant X \leqslant 200) \approx G_N(200{,}5; 30, \sqrt{25{,}5}) - G_N(24{,}5; 30, \sqrt{25{,}5})$
$= 0{,}8619... \approx 86{,}2\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 Plätze frei bleiben, beträgt 86,3 %. Die näherungsweise Berechnung ergibt einen Wert von 86,2 %.

8.172 In einem Vergnügungspark ist die neue Hochschaubahn eine besonders beliebte Attraktion. Wer das lange Anstellen vermeiden möchte, kann einen Platz vorbestellen. Erfahrungsgemäß kommen auch tatsächlich 92 % der Besucher, die für einen bestimmten Zeitraum vorbestellt haben. Wie viele Vorbestellungen kann man annehmen, wenn möglichst viele der dafür zur Verfügung stehenden 408 Plätze besetzt sein sollen? Die Gefahr einer Überbuchung soll dabei maximal 1 % betragen. Rechne näherungsweise mithilfe der Normalverteilung und überprüfe das Ergebnis anhand der Binomialverteilung. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

ABC

Lösung:
X … Anzahl der Besucher, die kommen; binomialverteilte Zufallsvariable
$P(X = 409, 410, ..., n) \leqslant 0{,}01$ mit $p = 0{,}92$ und $n = ?$
$\mu = n \cdot p = n \cdot 0{,}92$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{n \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}08}$
$P(0 \leqslant X \leqslant 408) = G_N(408{,}5; \mu, \sigma) > 0{,}99$
$G_N(-0{,}5; \mu, \sigma)$ ist vernachlässigbar klein.

Da n nicht bekannt ist und somit μ und σ auch unbekannt sind, muss man mit der Standardnormalverteilung rechnen.
$u_{0,99} = 2{,}3263...$
$2{,}3263... = \frac{408{,}5 - 0{,}92 \cdot n}{\sqrt{0{,}0736 \cdot n}} \Rightarrow n \leqslant 429{,}8...$
Die näherungsweise Berechnung ergibt, dass 429 Vorbestellungen entgegengenommen werden können.
Überprüfung mittels Binomialverteilung:

binomCdf(429,0.92,0,408)	0.995558
binomCdf(430,0.92,0,408)	0.992312
binomCdf(431,0.92,0,408)	0.987237

Anhand der Binomialverteilung erkennt man, dass auch 430 Karten verkauft werden dürfen.

8.173 30 % aller Österreicher haben die Blutgruppe 0+. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 500 000 der 1,8 Millionen Wienerinnen und Wiener diese Blutgruppe haben. AB

8.174 Im Eissalon Lottoberti werden Waffeln angeboten. Sie werden in Packungen zu 50 Stück geliefert. Beim Transport gehen erfahrungsgemäß 3 % der Waffeln zu Bruch. Wie viele Pakete muss Signor Lottoberti bestellen, wenn er 1 000 Stück benötigt und die Wahrscheinlichkeit, dass die Waffeln ausgehen, unter 5 % liegen soll? ABC

8.175 Auf einer bestimmten Flugstrecke fliegt täglich eine Maschine mit 400 Sitzplätzen. Aus Erfahrung weiß man, dass nur 80 % der gebuchten Plätze auch besetzt werden. ABC

1) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 gebuchten Sitzen genau 45 besetzt sind bzw. von den 400 Plätzen zwischen 310 und 325 besetzt sind. Vergleiche die Ergebnisse der Näherung mit den exakt berechneten Werten.

2) Fluggesellschaften überbuchen zur besseren Auslastung ihrer Flüge. Wie viele Tickets kann man für diesen Flug verkaufen, wenn die Gefahr der Überbuchung höchstens 0,01 % betragen darf?

8.176 Zeige die Richtigkeit der Behauptung: „Je näher p bei 0,5 liegt, umso kleiner kann n sein, sodass die Voraussetzung $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ erfüllt ist." D

8.5.5 Stichproben und Stichprobenmittelwerte

Oft ist es in einem Produktionsprozess notwendig, sich auf eine Auswahl aus einer Grundgesamtheit zu beschränken, zum Beispiel aus Zeitgründen, Kostengründen oder bei zerstörenden Prüfverfahren. Dabei werden häufig nicht alle Daten angegeben, sondern nur die wichtigsten Informationen in wenigen Zahlen „untergebracht". Dazu verwendet man Lage- und Streuungsmaße.

Mittelwert und Varianz bzw. Standardabweichung
Das in der Praxis wichtigste Lagemaß ist der arithmetische Mittelwert, das bedeutendste Streuungsmaß ist die Varianz bzw. die Standardabweichung. Geht man von einer Grundgesamtheit vom Umfang N und einer Stichprobe vom Umfang n aus, so gilt:

- Arithmetisches Mittel, Mittelwert: beschreibt die „durchschnittliche" Größe der Werte

Grundgesamtheit:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Stichprobe:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Varianz, Standardabweichung: beschreibt, wie stark die Werte um den Mittelwert „streuen"

Grundgesamtheit:

Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Stichprobe:

$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

$s = \sqrt{s^2}$

Die angegebene Formel für die Stichprobenvarianz wird auch als korrigierte Stichprobenvarianz bezeichnet. Für $n \geqslant 100$ ergeben sich kaum Unterschiede zu der Berechnung mithilfe der Formel für Grundgesamtheiten.

Verteilung von Stichprobenmittelwerten
Die vorgeschriebene Tragfähigkeit bei Aufzügen ist abhängig von der Fahrkorbgrundfläche. Die Personenzahl, die dieser Tragfähigkeit entspricht, hängt von der Masse der einzelnen Personen ab. Es schwankt jedoch die mittlere Masse einer Gruppe von zum Beispiel 8 Personen wesentlich weniger als jene von einzelnen Personen.

ABC TE

8.177 In einer Bäckerei werden Spezialbrote mit einer Masse von rund 900 g gefertigt. Die Brote aus einem Backvorgang haben folgende Massen (Angaben in Gramm):

905	901	902	891	899	893	898
894	895	900	903	904	897	890
901	903	898	898	889	901	902
895	899	902	895	900	903	899

Arbeitet beim Lösen der Aufgaben gemeinsam in der Klasse:

1) Berechne Mittelwert und Standardabweichung der gegebenen Grundgesamtheit.
2) Stelle die gegebene Verteilung in einem Balkendiagramm dar.
3) Wähle fünf der Brote aus und berechne den Mittelwert der Massen. Erstelle eine Liste aller Mittelwerte aus diesen Stichproben, die in der Klasse erhoben wurden.
4) Stelle die Verteilung der Stichprobenmittelwerte in einem Balkendiagramm dar und vergleiche es mit dem Diagramm der Grundgesamtheit. Beurteile die Ergebnisse.

Entnimmt man einer Grundgesamtheit mehrere Stichproben vom Umfang n und bildet jeweils deren Mittelwerte, so erhält man **Stichprobenmittelwerte**. Betrachtet man die Verteilung dieser Stichprobenmittelwerte, so gilt:

- Die Stichprobenmittelwerte sind normalverteilt, wenn die Daten der Grundgesamtheit (annähernd) normalverteilt sind, zB:

- Die Verteilung der Stichprobenmittelwerte ist annähernd normalverteilt, selbst wenn die Grundgesamtheit nicht normalverteilt ist, zB:

Die Stichprobenmittelwerte **streuen** um den **gleichen Erwartungswert** wie die ursprünglichen Daten. Die Schwankungen der ursprünglichen Werte heben einander durch die Mittelwertbildung zum Teil auf, die **Stichprobenmittelwerte streuen** also **weniger** als die Originaldaten. Die **Varianz** der Stichprobenmittel wird daher mit **zunehmendem Umfang kleiner**. Es lässt sich zeigen, dass die Varianz der Stichprobenmittelwerte indirekt proportional zum Umfang n der Stichproben ist, die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit also durch $\sqrt{n}$ zu dividieren ist.

Werden einer Verteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ Zufallsstichproben vom Umfang n entnommen, so gilt für die **Verteilung der Stichprobenmittelwerte** $\overline{x}_i$:

Erwartungswert $\mu_{\overline{x}} = \mu$

Standardabweichung $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Die Stichprobenmittelwerte sind annähernd normalverteilt, wobei die Näherung mit zunehmendem Stichprobenumfang n genauer wird.

Faustregel: Ab einem Stichprobenumfang von n = 30 sind die Stichprobenmittelwerte annähernd normalverteilt.

8.178 Auf einem Förderband werden Pakete transportiert, deren Massen annähernd normalverteilt sind mit μ = 20 kg und σ = 5 kg. Jeweils zehn Stück kommen auf einen Transportwagen. Für welche Belastung muss er ausgelegt sein, wenn die Gefahr einer Überlastung höchstens 2 % betragen soll?

AB TE

Lösung:

$\mu_{\overline{x}} = \mu = 20\text{ kg},\ \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$P(X \geqslant x_0) \leqslant 2\,\%$

$P(X \leqslant x_0) \geqslant 98\,\%$

$G(x_0;\ 20, \frac{5}{\sqrt{10}}\text{ kg}) \geqslant 98\,\%$

- Die mittlere Masse von zehn Paketen entspricht dem Zehnfachen des Mittelwerts einer Stichprobe von zehn Paketen.

$\text{invNorm}\left(0.98,20,\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \quad 23.2473$

$x_0 < 23{,}247\ldots$ kg

mittlere Masse von 10 Paketen $< 10 \cdot x_0 = 10 \cdot 23{,}247\ldots \text{ kg} = 232{,}47\ldots$ kg

Der Transportwagen muss (mindestens) eine Masse von 232,5 kg transportieren können.

Verteilung der Varianz σ^2 bzw. der Standardabweichung σ

Die bisher besprochenen Verteilungen wie zum Beispiel die Binomialverteilung und die Normalverteilung sind aus mathematischen Modellen zur Beschreibung eines bestimmten Vorgangs entstanden. Darüber hinaus gibt es auch Verteilungen, die als Grundlage statistischer Prüfungen dienen und **Prüfverteilungen** genannt werden.

Aus einer annähernd normalverteilten Grundgesamtheit werden mehrere Stichproben vom Umfang n gezogen und aus jeder Stichprobe die Varianz s^2 berechnet. Zur Beschreibung der Verteilung dieser Varianzen verwendet man die **χ^2-Verteilung** [sprich: „Chi-Quadrat-Verteilung"].

Man geht dabei von f unabhängigen Zufallsvariablen X_i aus, die normalverteilt sind mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Die Summe ihrer Quadrate wird dann als χ^2 bezeichnet, deren Verteilung als χ^2-Verteilung mit f **Freiheitsgraden**. Im Allgemeinen versteht man unter dem Freiheitsgrad eines Systems die Anzahl der Werte, die frei gewählt werden können. Sollen zum Beispiel drei Zahlen mit dem Mittelwert 100 angegeben werden, so kann man zwei Zahlen wählen, die dritte Zahl ist durch die Vorgabe des Mittelwerts nun vorbestimmt.

Die χ^2-Verteilung ist eine asymmetrische Verteilung, deren Funktionsgleichung mithilfe der Gammafunktion (siehe Band 3, Seite 212) definiert ist. Üblicherweise werden deren Werte Tabellen entnommen oder mit geeigneter Technologieunterstützung ermittelt.

ZB: Eine Zufallsvariable X ist χ^2-verteilt mit 8 Freiheitsgraden.
Die Dichtefunktion lautet:

$$g_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^3}{96} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$P(0 \leq X \leq 10) = G_{\chi^2_8}(10) = 0{,}7349...$ • Die Berechnung erfolgt technologieunterstützt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine χ^2-verteilte Zufallsvariable einen Wert von maximal 10 annimmt, beträgt also rund 73,5 %.

Man kann zeigen, dass die Prüfgröße $x_{prüf} = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ χ^2-verteilt ist mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden.

Berechnet man die Varianzen s^2 von n Stichproben einer Grundgesamtheit, so gilt:
Die Prüfgröße $x_{prüf} = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ ist χ^2-verteilt mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden.

TE

Technologieeinsatz: χ^2-Verteilung
TI-Nspire

Im Menü **5: Wahrscheinlichkeit**, **5: Verteilungen** stehen folgende Funktionen zur Verfügung:
χ^2Pdf(x,f) ... Dichtefunktion

χ^2Cdf(x_{unten},x_{oben},f) ... Verteilungsfunktion, zB:

χ²Cdf(0,10,8)	0.734974

Invχ^2(Fläche,f) ... Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion

Der Schwellenwert $\chi^2_{f;p}$ ist jener x-Wert, bis zu dem der Flächeninhalt unter der Kurve den Wert p hat.
ZB: $\chi^2_{8;0,734974} = 10$

invχ²(0.734974,8)	10.

8.179 Die Größe von männlichen 18-Jährigen ist normalverteilt mit $\mu = 182$ cm und $\sigma = 8$ cm. Bei der Stellung werden 18-Jährige in Gruppen von 25 Personen untersucht.

AB

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt in einer solchen Gruppe die Standardabweichung maximal 7 cm?

b) Berechne, welche maximale Standardabweichung mit 95%iger Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist.

Lösung:

a) $x_{prüf} = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} = 24 \cdot \frac{49}{64} = 18{,}375$

$G_{\chi^2_{24}}(18{,}375) = 0{,}2155...$

- $\sigma = 8$; $f = n - 1 = 24$; $s \leq 7$
- Für $s = 7$ ergibt sich eine Prüfgröße von $x_{prüf} = 18{,}375 \Rightarrow 21{,}6$ % aller Stichproben weisen eine Varianz von höchstens 7 cm auf.

χ²Cdf(0,18.375,24)	0.215552

Die Standardabweichung von rund 21,6 % aller Stichproben beträgt 7 cm oder weniger.

b) $G_{\chi^2_{24}}(x_{prüf}) = 0{,}95$

$\chi^2_{24;\,0{,}95} = 36{,}415...$

$x_{prüf} = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$

$36{,}415... = 24 \cdot \frac{s^2}{64}$

$s^2 = 97{,}106... \Rightarrow s = 9{,}854...$

- Die Prüfgröße $x_{prüf}$, der eine Wahrscheinlichkeit von 95 % entspricht, wird berechnet.

invχ²(0.95,24)	36.415

In 95 % aller untersuchten Gruppen beträgt die maximale Standardabweichung rund 9,85 cm.

8.180 Für eine annähernd normalverteilte Größe gilt: $\mu = 20$ und $\sigma = 3$

AB

1) Gib die Parameter der Normalverteilung an, die die Verteilung der Stichprobenmittelwerte beim gegebenen Stichprobenumfang n beschreibt.

2) Stelle die Dichtefunktion der ursprünglich gegebenen Verteilung und die der Stichprobenmittelwerte in einem gemeinsamen Diagramm dar. Beschreibe die Unterschiede und Gemeinsamkeiten.

a) n = 10 ***b)*** n = 5 ***c)*** n = 8 ***d)*** n = 25

8.181 In einer Entwicklungsabteilung für Motoren wird ein Treibstoff sparendes Modell einem Dauertest unterzogen. Der Verbrauch in der Testperiode liegt im Mittel bei 3,5 Liter Diesel pro 100 km mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}2$ Liter pro 100 km. Bei der nächsten Testserie wird die Testperiode zehnmal so lang gewählt. Beschreibe den Zusammenhang zwischen der ursprünglichen und der neuen Verteilung.

AC

Wahrscheinlichkeitsrechnung

C **8.182** Kreuze die richtige Fortsetzung an.
Die Verteilung von Stichprobenmittelwerten von Stichproben vom Umfang n = 36 aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit $\mu = 80$ und $\sigma = 9$ ist …

… normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} = 0$ und $\sigma_{\bar{x}} = 9$.	☐
… normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} = 80$ und $\sigma_{\bar{x}} = 9$.	☐
… normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} \neq 80$ aber $\sigma_{\bar{x}} = 9$.	☐
… normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} = 80$ und $\sigma_{\bar{x}} = 1{,}5$.	☐
… normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} = 80$ und $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}25$.	☐

C **8.183** Die Grafik zeigt die Verteilung der Stichprobenmittelwerte für drei verschiedene Stichprobengrößen aus der gleichen Grundgesamtheit. Beurteile folgende Aussage: „Der Stichprobenumfang der lila dargestellten Verteilung ist am größten."

σ = 0,5
σ = 1
σ = 2
μ

AB **8.184** Baumwolle wird in Säcken verschickt, deren Masse normalverteilt mit $\mu = 10$ kg und $\sigma = 0{,}5$ kg ist. Diese Baumwolle kann in Einheiten zu 20 Säcken bestellt werden.
1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Einheit mehr als 202 kg Baumwolle enthält?
2) Wie viel kg Baumwolle enthält eine solche Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % maximal?

AB **8.185** Die Reißfestigkeit von Gummiringerl eines bestimmten Typs unterliegt einer Normalverteilung mit $\mu = 38\,\frac{N}{mm^2}$ und $\sigma = 2\,\frac{N}{mm^2}$.
1) Gib die Verteilung der Mittelwerte von Stichproben vom Umfang n = 25 an.
2) Welche Reißfestigkeit wird von den Mittelwerten von Stichproben mit n = 25 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % überschritten?

AB **8.186** Die Masse von Wachteleiern ist normalverteilt mit $\sigma = 4$ g. Es wird eine große Anzahl von Stichproben vom Umfang n = 12 geprüft.
1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Standardabweichung einer Stichprobe kleiner als 3,8 g?
2) Wie groß ist die Standardabweichung der Stichprobe mit 90%iger Sicherheit mindestens?

AB **8.187** Die Lichtausbeute von Speziallampen ist normalverteilt mit $\sigma = 50\,\frac{\text{Lumen}}{\text{Watt}}$. Es wird eine große Anzahl von Stichproben vom Umfang n = 10 geprüft.
1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Standardabweichung einer Stichprobe größer als $55\,\frac{\text{Lumen}}{\text{Watt}}$?
2) Wie groß ist die Standardabweichung der Stichprobe mit 95%iger Sicherheit mindestens?

AB **8.188** Eine Abfüllanlage soll Zucker in Packungen zu 1 kg abfüllen. Tests haben eine Standardabweichung von 10 g ergeben.
1) Auf welchen Mittelwert μ muss die Anlage eingestellt werden, wenn aus rechtlichen Gründen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket unter 995 g hat, unter 0,5 % liegen soll?
2) In der gleichen Anlage werden (durch fünfmaliges Ausführen des Vorgangs) auch 5-kg-Pakete abgefüllt. In welchem Bereich symmetrisch um μ liegt die Masse der abgefüllten 5-kg-Pakete mit einer Sicherheit von 99 %?

Zusammenfassung

Kombinatorik

Anzahl der Permutationen (Anordnungen) von n Elementen ohne bzw. mit Wiederholung

$P = n!$ $\quad P_W = \frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t! \cdot \ldots}$ $\quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Anzahl der Variationen (Auswahl + Anordnung) ohne bzw. mit Wiederholung

$V = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad V_W = n^k$

Anzahl der Kombinationen (Auswahl) ohne bzw. mit Wiederholung

$C = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ $\quad C_W = \binom{n+k-1}{k}$ $\quad \binom{n}{k}$ ... Binomialkoeffizient „n über k"

Binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeit bei einem **Laplace-Experiment**

$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ $\quad$ mit $0 \leqslant P(\text{Ereignis}) \leqslant 1$

Gegenwahrscheinlichkeit: $P(\text{nicht } E) = 1 - P(E)$

Additionssatz für die „oder"-Verknüpfung von Ereignissen:

$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$ $\quad$ A, B ... einander ausschließende Ereignisse

$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ und } B)$ $\quad$ A, B ... beliebige Ereignisse

Multiplikationssatz für die „und"-Verknüpfung von Ereignissen:

$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$ $\quad$ A, B ... voneinander unabhängige Ereignisse

$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B|A)$ $\quad$ A, B ... beliebige Ereignisse

Satz von Bayes: $P(B|A) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Baumdiagramme dienen zur übersichtlichen Darstellung von mehrstufigen Versuchen; die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe der Pfadregeln.

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion g** ordnet jedem Wert einer diskreten Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens zu. Es gilt:

$$g(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{für } x = x_1, x_2, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die **Verteilungsfunktion G** ordnet jedem Wert der Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit zu, diesen oder kleinere Werte anzunehmen.

$$G(x) = P(X \leqslant x) = \sum_i g(x_i) \quad \text{für } x_i \leqslant x$$

Binomialverteilung

$g(x; n, p) = P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ $\quad$ n ... Anzahl der Versuche
x ... Anzahl der Erfolge
p ... Erfolgswahrscheinlichkeit eines Versuchs

- Es gibt genau zwei Möglichkeiten für den Ausgang eines Zufallsexperiments.
- Die Ereignisse müssen voneinander unabhängig sein.
- Die Wahrscheinlichkeit p bleibt konstant.

Erwartungswert: $\mu = E(X) = n \cdot p$ $\quad$ Varianz: $\sigma^2 = V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hypergeometrische Verteilung

$$g(x; N, M, n) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N ... Grundgesamtheit
M ... Anzahl der Elemente mit besonderem Merkmal
n ... Stichprobenumfang

Erwartungswert: $\mu = E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Varianz: $\sigma^2 = V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Poisson-Verteilung

$$g(x; \mu) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$$

$\mu = E(X) = V(X)$

Gauß'sche Normalverteilung

X ... normalverteilte Zufallsvariable

Dichtefunktion: $g(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Verteilungsfunktion: $G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Zentraler Grenzwertsatz

Die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

Standardnormalverteilung einer stetigen Zufallsvariablen

N(0, 1) ... Standardnormalverteilung, $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

Standardisierungsformel: $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Für große n lässt sich die Binomialverteilung mit dem Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ durch die Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ nähern.
Voraussetzung: $\sigma > 3$

Stetigkeitskorrektur

Bei Näherung einer diskreten Verteilung durch eine stetige Verteilung gilt:

$$P(a \leq X \leq b) \approx G(b + 0{,}5) - G(a - 0{,}5)$$

Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\overline{x}_i$

Mittelwert $\mu_{\overline{x}} = \mu$, Standardabweichung $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Die Stichprobenmittelwerte sind annähernd normalverteilt, wobei die Näherung mit zunehmendem n genauer wird. Sind die ursprünglichen Daten annähernd normalverteilt, so sind die Stichprobenmittelwerte (exakt) normalverteilt (Zentraler Grenzwertsatz).

Verteilung der Stichprobenvarianzen s^2

Die Prüfgröße $x_{prüf} = (n - 1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ **ist χ^2-verteilt mit f = n – 1 Freiheitsgraden.**

Weitere Aufgaben
Kombinatorik

8.189 In einem Schigebiet gibt es einen 8er-Sessellift. Auf wie viele Arten können
a) 8 Personen, ***b)*** 6 Personen auf den 8 Sesseln Platz nehmen?

AB

8.190 2-€-Münzen zeigen auf einer Seite „Zahl", also 2 €, und auf der anderen Seite ein Bild, das in jedem Land anders gestaltet wurde.

AB

1) Jemand wirft 4-mal mit einer 2-€-Münze. Wie viele verschiedene Ausgänge sind beim Werfen mit vier 2-€-Münzen möglich, wenn nur zwischen „Zahl" und „Bild" unterschieden wird und es auf die Rechenfolge nicht ankommt?
2) Auf wie viele Arten kann man drei 2-€-Münzen in einer Reihe anordnen, wenn die drei Münzen aus verschiedenen Ländern stammen und jeweils auf Vorder- oder Rückseite gelegt werden dürfen und die unterschiedlichen Bilder dabei berücksichtigt werden?

8.191 Für die Benützung der Toilette in Restaurants ist oft die Eingabe eines Codes notwendig. Der Code besteht aus 2 Buchstaben (A, ..., Z; zwischen Groß- und Kleinschreibung wird nicht unterschieden), gefolgt von 2 Ziffern (0, ..., 9).

ABCD

1) Wie viele verschiedene Codes gibt es?
2) Ändert sich die Anzahl der möglichen Codes, wenn Buchstaben und Ziffern jeweils abwechselnd vorkommen? Begründe deine Antwort.
3) Um welchen Faktor ändert sich die Anzahl der möglichen Codes, wenn der Code 5-stellig sein soll und deshalb nach den beiden Ziffern noch ein weiterer Buchstabe eingegeben werden muss (a, ..., z; A, ..., Z; zwischen Groß- und Kleinschreibung wird unterschieden)?

8.192 Auf einer Party wird je eine Eintrittskarte für A verschiedene Konzerte verlost. Es sind B Partygäste anwesend ($B > A$). Gib eine Formel für die Anzahl der möglichen Ausgänge der Verlosung an, wenn

AB

1) kein Gast mehr als eine Karte gewinnen kann.
2) ein Gast auch mehrmals gewinnen kann.

8.193 In den verschiedenen Ländern Europas gibt es unterschiedliche Lotto-Varianten, zum Beispiel:

ABC

Bulgarien: 5 aus 35	Italien: 6 aus 90	Litauen: 6 aus 30
Österreich: 6 aus 45	Schweden: 7 aus 35	Schweiz: 6 aus 45 plus 1 aus 3

1) In welchem Land hat man die größte Chance, den Haupttreffer zu erzielen?
2) Recherchiere mögliche Gründe für diese unterschiedlichen Spielformen.

8.194 Das schnellste Boot beim Rudern ist der Achter. Das Boot hat 8 Ausleger, 4 auf jeder Seite (backbord, steuerbord). Der Schlagmann ist jener Ruderer, der die Ruderfrequenz vorgibt. Er sitzt im Heck des Boots, also so, dass er von allen anderen gesehen werden kann.

AB

1) Auf wie viele Arten können 8 Ruderer im Boot sitzen?
2) Berechne die Anzahl der möglichen Anordnungen, wenn vorher bestimmt wird, welcher Ruderer der Schlagmann ist.
3) Auf wie viele Arten kann man die Plätze besetzen, wenn die Position des Schlagmanns bereits besetzt ist und für die anderen Plätze noch 10 weitere Ruderer zur Verfügung stehen? Beantworte die Frage unter der Voraussetzung, dass die Position, an der ein Ruderer sitzt, dabei von Bedeutung ist.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

AB **8.195** Mit einem fairen Würfel wird 2-mal gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit für das angegebene Ereignis.

a) Der 1. Wurf zeigt fünf.
b) Der 2. Wurf zeigt drei.
c) Die Augensumme ist elf.
d) Die Augensumme ist größer als zehn.
e) Die Augensumme beträgt höchstens 1.
f) Die Augensumme ist mindestens zwei.

AB **8.196** Thomas wirft eine Münze 3-mal. Veranschauliche den Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms und gib die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis an.

a) dreimal Kopf
b) kein Kopf
c) mehr Kopf als Zahl
d) höchstens zweimal Kopf
e) mindestens zweimal Kopf
f) drei gleiche Ergebnisse

AB **8.197** In einer Schachtel sind je fünf Lose in den Farben rot, gelb und blau. Sabrina zieht hintereinander zwei Lose, ohne sie wieder in die Schachtel zurückzulegen. Veranschauliche den Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms. Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass sie folgende Lose gezogen hat.

1) 1. Los rot, 2. Los blau
2) 1. Los rot, 2. Los rot
3) ein rotes und ein blaues Los in beliebiger Reihenfolge
4) kein gelbes Los

AB **8.198** Bei einer Probefertigung von Stanzteilen treten drei Fehler unabhängig voneinander auf: Bruch bei 15 %, Stanzfehler bei 5 %, Materialfehler bei 10 % der Stanzteile
Ein Stanzteil wird zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Teil

a) alle 3 Fehler aufweist.
b) fehlerhaft ist.
c) nur den Fehler „Bruch" aufweist.
d) genau einen der drei Fehler aufweist.

AB **8.199** In einer Stadt wird im Mittel für jeden 10. Hund keine Hundesteuer bezahlt. Bei einer Kontrolle werden drei Hundebesitzer überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei Hundebesitzer die Steuer bezahlt haben?
b) die ersten beiden Hundebesitzer die Steuer bezahlt haben, der dritte jedoch nicht?

AB **8.200** In der Oberstufe einer Internatsschule sind 80 Schülerinnen und Schüler. Unter diesen 80 sind zehn externe Schülerinnen und Schüler, vier davon sind Mädchen. 40 Knaben sind Internatsschüler. Eine Person S wird zufällig ausgewählt. Ermittle die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis.

a) P(S ist weiblich)
b) P(S ist männlich)
c) P(S ist Externistin oder Externist)
d) P(S ist Internatsschülerin oder -schüler)
e) P(S ist weiblich|S ist nicht im Internat)
f) P(S ist männlich|S ist im Internat)
g) P(S ist im Internat|S ist männlich)
h) P(S ist Externistin|S ist weiblich)

ACD **8.201** Auf einer Anzeigetafel sind 5 grüne und 4 rote Kontrolllampen angebracht. Bei einem Test leuchten hintereinander drei zufällig ausgewählte Lampen auf. Kreuze an, welcher Ausdruck die Wahrscheinlichkeit angibt, dass höchstens 2-mal eine grüne Lampe geleuchtet hat. Begründe deine Auswahl.

$\left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{9}$	☐
$3 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}$	☐
$3 \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2$	☐
$1 - \left(\frac{5}{9}\right)^3$	☐
$1 - \left(\frac{4}{9}\right)^3$	☐

8.202 Jeder Schüler entdeckt von zehn Fehlern des Mathematiklehrers im Durchschnitt einen. AB

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Fehler, den der Mathematiklehrer gemacht hat, in einer Klasse mit 20 Schülern entdeckt?

b) Wie viele Schüler müssen in der Klasse sein, damit mindestens ein Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % entdeckt wird?

8.203 Rund 12 % der Bevölkerung sind Linkshänder. AB

1) Erstelle ein Baumdiagramm zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass unter 3 Befragten mindestens ein Linkshänder ist. Berechne diese Wahrscheinlichkeit anschließend.

2) Wie viele Menschen muss man auswählen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Linkshänder in der Gruppe ist?

8.204 Erkläre, welche der beiden Aufgaben mithilfe des dargestellten Baumdiagramms gelöst werden kann. Beschrifte für diese Aufgabe das Baumdiagramm richtig und ermittle die gesuchte Wahrscheinlichkeit. ABD

A) Ein Würfel wird 2-mal geworfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 12 beträgt.

B) Aus einer Urne mit 5 blauen und 5 rosa Kugeln werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, Kugeln gleicher Farbe zu ziehen.

Binomialverteilung

8.205 Bankomaten sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 7 % außer Betrieb. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn zufällig ausgewählten Bankomaten AB

a) genau einer außer Betrieb ist.

b) höchstens einer außer Betrieb ist.

c) mindestens einer außer Betrieb ist.

d) mehr als 3 außer Betrieb sind.

e) weniger als die Hälfte außer Betrieb ist.

f) weniger als die Hälfte in Betrieb ist.

g) alle in Betrieb sind.

8.206 Eine Impfung ruft bei 8 % der Geimpften Nebenwirkungen hervor. AB

1) Gib eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass unter 30 geimpften Personen mindestens 4 an Nebenwirkungen leiden.

2) Für weitere Untersuchungen werden Personen nach der Impfung zufällig ausgewählt. Berechne, wie viele Personen man auswählen muss, damit sich darunter mit mindestens 95%iger Sicherheit mindestens 10 Personen befinden, die unter Nebenwirkungen leiden.

8.207 Im Testbetrieb einer neuen Fertigungsanlage betrug der Ausschussanteil 3 %. ABD

1) Erkläre, welche Wahrscheinlichkeit mithilfe der folgenden Formel berechnet wird:

$$P = \sum_{x=90}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0{,}97^{100-x} \cdot 0{,}03^{x}$$

2) Ermittle, auf welchen Prozentsatz man den Ausschussanteil senken muss, damit unter 100 getesteten Stücken mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % höchstens 3 Stück Ausschuss sind.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hypergeometrische Verteilung, Poissonverteilung

AB **8.208** Laut Schätzungen der Polizei sind ein Drittel aller LKW technisch zu beanstanden. Auf einem Autobahn-Parkplatz sind an einem Sonntag 30 LKW abgestellt. Die Polizei kontrolliert 10 zufällig ausgewählte LKW. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass
1) genau 3 Fahrzeuge technische Mängel aufweisen.
2) mindestens bzw. höchstens 2 Fahrzeuge technische Mängel aufweisen.

AB **8.209** Bei der Lackierung von Motorabdeckungen beträgt die mittlere Lackfehleranzahl 2,1.
1) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung verwendet man bei der zählenden Prüfung auf Fehler pro Einheit? Gib die Verteilung und ihre wichtigsten Eigenschaften an.
2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Motorabdeckung
a) keinen, **b)** mindestens einen, **c)** höchstens einen Lackfehler aufweist.

AB **8.210** Ein Orientteppich enthält im Mittel einen Webfehler pro Quadratmeter. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen 150 cm x 200 cm Teppich ohne Fehler zu finden?

Normalverteilung

AC **8.211** Die Grafiken zeigen die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable.
1) Ergänze in beiden Grafiken die Beschriftung des Erwartungswerts.
2) Veranschauliche den in der Verteilungsfunktion markierten Wert in der Dichtefunktion.

AB **8.212** Das Körpergewicht von Neugeborenen ist normalverteilt mit μ = 3 350 g und σ = 390 g.
1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Neugeborenes
a) mehr als 3 000 g **b)** weniger als 2 500 g **c)** zwischen 4 000 g und 5 000 g hat?
2) Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es
a) zu den 10 % der schwersten gehört? **b)** zu den 15 % der leichtesten gehört?
3) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert schwankt das Gewicht von 80 % der Neugeborenen?

AB **8.213** Die oberste Schicht einer Autolackierung ist Klarlack. In einer Fertigungsanlage weiß man aus Erfahrung, dass die Schichtdicke normalverteilt ist.
1) Ermittle den Erwartungswert μ, wenn σ = 5 μm beträgt und 10 % der Autos eine Schichtdicke, die größer als 32 μm ist, aufweisen.
2) Berechne die zulässige Standardabweichung σ, wenn μ = 35 μm beträgt und maximal 5 % der Fahrzeuge eine geringere Schichtdicke als 30 μm aufweisen dürfen.

8.214 Die Dicke von Aluminiumblechen einer Produktionsserie ist annähernd normalverteilt. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der Normalverteilung, wenn 12 % der Bleche dünner als 1,9 mm und 20 % der Bleche dicker als 2,05 mm sind. AB

8.215 Maschinenöl wird in Dosen abgefüllt. Die Füllmenge ist normalverteilt mit μ = 0,995 Liter und σ = 0,008 Liter. Die Dosen werden vom Großhändler in Packungen zu 20 Stück verkauft. Welche Mindestölmenge enthält eine solche Packung mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %? AB

Vermischte Aufgaben

8.216 Auf einem Biobauernhof werden Eier produziert, deren Masse normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt μ = 60 g, die Standardabweichung σ = 8,5 g. AB

1) Wie viel Prozent der Eier haben eine Masse von mehr als 80 g bzw. weniger als 50 g?
2) 3,5 % der Eier werden in der Verpackungsanlage beschädigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 30 Eiern höchstens zwei beschädigt sind?

8.217 Eine Abfüllvorrichtung für naturtrüben Apfelsaft ist so eingestellt, dass die Abfüllmenge normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt μ =1 020 ml und die Standardabweichung σ =10 ml. Die auf der Packung angegebene Füllmenge ist 1 Liter. 2 % aller abgefüllten Packungen sind beschädigt und müssen daher ausgeschieden werden. AB

a) Es wird eine Stichprobe von 50 Packungen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mehr als 3 beschädigte Packung darunter befinden?
b) Nur Packungen mit einem Inhalt zwischen 998 ml und 1 030 ml werden zur Auslieferung freigegeben. Berechne, wie viel Prozent der Packungen nicht ausgeliefert werden können.
c) Welche Saftmenge enthalten 90 % der Packungen maximal?
d) Zur laufenden Kontrolle werden Stichproben zu je 30 gefüllten Packungen entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Flüssigkeitsmenge der Stichproben mehr als 1 022 ml beträgt.
e) Ermittle, welchen Wert μ haben muss, damit in einer Stichprobe von 100 Stück die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Flüssigkeitsmenge kleiner als 1 020 ml ist, kleiner als 10 % ist?

8.218 In einer Firma mit 900 Angestellten liegt monatlich ein interner Qualitätsbericht beim Portier auf. Im Mittel nehmen 85 % der Angestellten einen Bericht mit. AB

1) Es stehen jeden Monat 780 Stück zur freien Entnahme bereit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann die Nachfrage gedeckt werden?
2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der entnommenen Stück um höchstens zehn Stück vom Erwartungswert abweicht?
3) Beim Kopieren des Berichts kommt es zu einem Ausschuss von 2 %. Wie viel Stück müssen mindestens hergestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 97 % wenigstens 780 Stück zur Verfügung stehen?
4) Im Manuskript des Berichts finden sich im Mittel 0,5 Druckfehler pro Seite. Mit welcher Mindestanzahl an Druckfehlern muss man bei einem 20-seitigen Bericht mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % rechnen?
5) Die Angestellten beschäftigen sich unterschiedlich lang mit dem Studium des Berichts. Die Zeitspanne ist annähernd normalverteilt mit μ = 1,2 Stunden und σ = 15 Minuten. Ermittle, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich ein zufällig ausgewählter Angestellter länger als 1 Stunde 40 Minuten mit dem Bericht auseinandersetzt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgaben in englischer Sprache

binomial coefficient „n choose k“	$\binom{n}{k}$	mean	Mittelwert
		n factorial	n Faktorielle
binomial distribution	Binomialverteilung	normal distribution	Normalverteilung
certain event	sicheres Ereignis	permutation	Permutation
combination	Kombination	probability	Wahrscheinlichkeit
(in)dependent events	(un)abhängige Ereignisse	random variable	Zufallsvariable
expected value of X	Erwartungswert E(X)	standard deviation σ	Standardabweichung
impossible event	unmögliches Ereignis	z-score	$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ (u-Wert)

AB **8.219** A fence that surronds a fiels has four gates.
1) How many options does Erin have to enter the field and exit?
2) How many options does Erin have to enter the field and exit by a gate different than the one by which he entered?

AB **8.220** 3-digit numbers are formed from the digits 2, 3, 5 and 7. No digit appears more than once per number.
1) How many different numbers can be created?
2) How many numbers are less than 500?
3) How many numbers are odd?
4) How many numbers are divisible by 5?

AB **8.221** A card is drawn from a full pack of 52 cards. Find the probability that the card chosen is **1)** a black card, **2)** a diamond, **3)** an ace, **4)** a king or a queen, **5)** an even number.

AB **8.222** Seven people, of whom four are women, are to form a queue.
Find how many different arrangements there are
1) if not two people of the same sex are to stand next to each other.
2) if the first and the last persons in this queue are to be man.

AB **8.223** The probability that any child in a certain class travels to school by bus is 0.6. If four children are selected at random, what is the probability that
1) all of them travel to school by bus,
2) one of them travels to school by bus,
3) at least one of them travels to school by bus?

AB **8.224** If 7.5 % of students suffer from rhinitis, find the probability that 65 or more in a randomly selected group of 850 students will suffer from this disease.

AB **8.225** A fair die is thrown 800 times. Find the probability of getting
1) more than 140 sixes, **2)** less than 100 sixes and **3)** between 110 and 150 sixes.

AB **8.226** The weights of dairy cows are known to have a mean weight of 584 kg and a standard deviation of 45 kg. Find the z-scores of 520 kg and 600 kg.
Instruction: Calculate how many σ away from the mean these values are.

Wissens-Check

		gelöst
1	Wie viele mögliche Farbanordnungen gibt es, wenn man aus 5 verschiedenfärbigen Kugeln 2 ohne Zurücklegen auswählt und die Farbreihenfolge von Bedeutung ist?	
2	Gib an, welcher Ausdruck die Anzahl der Möglichkeiten angibt, 4 Personen in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen. A) $\binom{4}{1}$ B) 44 C) 4!	
3	Ein Würfel wird geworfen. Ordne dem Ereignis die passende Wahrscheinlichkeit zu: (siehe Tabellen unten)	
4	Wähle die richtige Antwort aus. Eine diskrete Zufallsvariable ist... A) ... eine beliebige Variable, die nur Werte aus $\mathbb{Z}$ annehmen kann. B) ... zum Beispiel die Anzahl der fehlerfreien Elemente in einer Stichprobe. C) ... ein Variable, die im Text versteckt ist und nur durch Zufall entdeckt wird.	
5	Ich kann den Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion diskreter Zufallsvariablen erklären.	
6	Aus einer Urne mit 3 roten und 5 blauen Kugeln wird gezogen. A) Wird „Ziehen mit Zurücklegen" oder „Ziehen ohne Zurücklegen" dargestellt? B) Ergänze das Baumdiagramm. C) Gib an, welche Wahrscheinlichkeit am Ende des Pfads berechnet wird.	
7	Ich kenne die Voraussetzungen, unter denen man die Binomialverteilung anwenden kann. Ich kann die zugehörigen Parameter benennen und deren Bedeutung erklären.	
8	Eine Messgröße ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 25$ und der Standardabweichung $\sigma = 2{,}0$. Kreuze die richtige Aussage an. (siehe Tabelle unten)	

Zu 3:

E ... Augenzahl 8	☐
E ... nicht 6	☐

A	$P(E) = 0$
B	$P(E) = \frac{1}{6}$
C	$P(E) = 1 - \frac{1}{6}$
D	$P(E) = 1$

Zu 6 (Baumdiagramm): $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, ?

Zu 8:

Fast alle Werte liegen zwischen 17 und 33.	☐
Zwei Drittel aller Werte liegen unter 27.	☐
2,5 % aller Werte liegen über 31.	☐
Ein Drittel aller Werte liegen unter 23.	☐

Lösung:
1) $5 \cdot 4 = 20$ 2) C) 3) A), C) 4) B) 5) siehe Seiten 185ff 6) A) Ziehen mit Zurücklegen, B) oberer Ast jeweils $\frac{5}{8}$, unterer Ast jeweils $\frac{3}{8}$, C) P(2 Kugeln rot) 7) siehe Seite 189 8) Fast alle Werte liegen zwischen 17 und 33.

9 Beurteilende Statistik

Die beurteilende Statistik beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen Grundgesamtheit und Stichprobe. Dabei werden mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Schlüsse aus den vorhandenen Informationen gezogen. Man spricht deshalb von der **schließenden** bzw. **beurteilenden Statistik**. Hierbei ergeben sich zwei Möglichkeiten:

Direkter Schluss
Ermittlung eines **Zufallsstreubereichs**

Die Parameter der Grundgesamtheit sind bekannt. Der Einfluss des Zufalls bei der zufälligen Wahl eines Einzelwerts wird untersucht.

Eine Stichprobe liegt vor. Sinnvolle Aussagen über die Parameter der Grundgesamtheit sollen daraus abgeleitet werden.

Ermittlung eines **Vertrauensbereichs**
Indirekter Schluss

9.1 Zufallsstreubereiche

9.1.1 Zufallsstreubereiche der Normalverteilung

B 9.1 Eine Produktionsfirma füllt Pakete ab. Die Masse der abgefüllten Pakete ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 520$ g und $\sigma = 15$ g.
Ermittle, in welchem symmetrisch um μ gelegenen Bereich die Masse eines zufällig ausgewählten Pakets mit 85%iger Wahrscheinlichkeit liegt.

Wird aus einer Grundgesamtheit eine Stichprobe entnommen, so streuen die Werte in einem Bereich, der einerseits von den Parametern der Grundgesamtheit und andererseits vom Zufall abhängt. Man kann nun einen Bereich ermitteln, in dem die Werte mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit liegen. Dieser Bereich wird **Zufallsstreubereich** (ZSB) genannt.

ZB: Die Längen von Schrauben sind normalverteilt. Ein Bereich, in dem die Länge einer zufällig ausgewählten Schraube mit 90%iger Sicherheit zu erwarten ist, heißt 90-%-Zufallsstreubereich. Wählt man den Bereich symmetrisch um den Erwartungswert μ, so verteilt sich auch das „Restrisiko", also die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge außerhalb des ermittelten Bereichs liegt, von $\alpha = 10$ % symmetrisch. Man spricht von einem **zweiseitigen Zufallsstreubereich**.

Ein **einseitig nach unten begrenzter Zufallsstreubereich** gibt an, mit welcher Schraubenlänge man mit vorgegebener Sicherheit **mindestens** rechnen kann.

Ein **einseitig nach oben begrenzter Zufallsstreubereich** gibt an, mit welcher Schraubenlänge man mit vorgegebener Sicherheit **höchstens** rechnen kann.

$\frac{\alpha}{2}$ $1-\alpha$ $\frac{\alpha}{2}$ x x_u x_o
Zweiseitiger Zufallsstreubereich

α $1-\alpha$ x x_u
Einseitig nach unten begrenzter Zufallsstreubereich

$1-\alpha$ α x x_o
Einseitig nach oben begrenzter Zufallsstreubereich

Der Bereich, in dem der zufällig gewählte Wert mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit liegt, wird durch die Grenzen x_u und x_o (zweiseitiger ZSB) bzw. durch eine Grenze x_u (x_o) beim einseitig nach unten (oben) begrenzten ZSB begrenzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Wert einen Wert außerhalb dieses Bereichs liefert, wird **Irrtumswahrscheinlichkeit** (**Signifikanzniveau**) α genannt.

Bei der Normalverteilung lassen sich die Grenzen des Zufallsstreubereichs mithilfe der Standardnormalverteilung ermitteln. Möchte man zum Beispiel den zweiseitig begrenzten Zufallsstreubereich mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α bestimmen, so geht man wie folgt vor:

$P(x_u \leqslant X \leqslant x_o) = 1 - \alpha$

$P(x \leqslant x_o) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

- Da der Bereich symmetrisch um μ liegt, genügt es, das Quantil $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ zu berechnen.

$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{x_o - \mu}{\sigma}$

- Transformationsformel

$x_o = \mu + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$ bzw. $x_u = \mu - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$

Für den einseitig nach unten bzw. oben begrenzten Zufallsstreubereich ermittelt man $u_{1-\alpha}$ und geht analog vor.
Beim technologieunterstützten Arbeiten kann für die Ermittlung der Bereichsgrenzen auch direkt die inverse Normalverteilung mit gegebenem μ und σ verwendet werden.

(1 – α)-Zufallsstreubereich von N(μ, σ)
α … Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)

Zweiseitig begrenzter ZSB
$x_{o,u} = \mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$

Einseitig begrenzter ZSB
nach unten: $x_u = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \sigma$ nach oben: $x_o = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \sigma$

Da für die Verteilung von Stichprobenmittelwerten $\mu_{\bar{x}} = \mu$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ gilt (vgl. Seite 215), können die Zufallsstreubereiche folgendermaßen berechnet werden.

(1 – α)-Zufallsstreubereich für Stichprobenmittelwerte
α … Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)

Zweiseitig begrenzter ZSB
$\bar{x}_{o,u} = \mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Einseitig begrenzter ZSB
nach unten: $\bar{x}_u = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ nach oben: $\bar{x}_o = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

BD TE

9.2 Eine Größe ist normalverteilt mit $\mu = 70$ und $\sigma = 2$.
1) Ermittle den zweiseitigen Zufallsstreubereich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\,\%$.
2) Erkläre, welche Aussage über einen zufällig ausgewählten Wert getroffen werden kann.

Lösung:
1) $x_{o,u} = \mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 70 \pm u_{0,975} \cdot 2$

- $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-0,025} = u_{0,975}$

$x_{o,u} \approx 70 \pm 1,96 \cdot 2 = 70 \pm 3,92$

- invNorm(0.975,0,1) 1.95996

Der gesuchte Zufallsstreubereich lautet [66,08; 73,92].
2) Ein zufällig gewählter Wert liegt mit 95%iger Sicherheit im Bereich [66,08; 73,92].

AB **9.3** Eine Größe ist normalverteilt mit $\mu = 60$ und $\sigma = 2$. Stichproben vom Umfang $n = 20$ werden entnommen.

1) Ermittle den zweiseitigen 90-%-Zufallsstreubereich für die Stichprobenmittelwerte mithilfe der standardisierten Normalverteilung.

2) Ermittle den einseitig nach unten begrenzten Zufallsstreubereich für die Stichprobenmittelwerte mit $\alpha = 1$ %.

Lösung:

$\mu_{\bar{x}} = \mu = 60 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{20}}$

1) $\bar{x}_{o,u} = 60 \pm u_{0,95} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}}$

● $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$

```
invNorm(0.95,0,1)          1.64485
```

$\bar{x}_u = 59,2643...$ $\quad \bar{x}_o = 60,7356...$

Der zweiseitige Zufallsstreubereich lautet [59,26; 60,74].

2)

$$\text{invNorm}\left(0.01,60,\frac{2}{\sqrt{20}}\right) \qquad 58.9596$$

● Die Ermittlung des ZSB kann mit Technologieeinsatz auch direkt erfolgen.

$\bar{x}_u = 58,9596...$

Der einseitig nach unten begrenzte Zufallsstreubereich lautet [58,96; ∞[.

AB **9.4** Die Länge von Bolzen ist normalverteilt mit $\mu = 50$ mm und $\sigma = 0,5$ mm.

1) Ermittle den zweiseitigen 95%igen Zufallsstreubereich.

2) Berechne den einseitig nach oben begrenzten 99-%-Zufallsstreubereich für die Stichprobenmittelwerte für Stichproben vom Umfang $n = 25$.

ABD **9.5** In einem Produktionsbetrieb wurde festgestellt, dass die Längen von maschinell hergestellten Dessertgabeln normalverteilt sind mit einem Erwartungswert von 7,00 cm und einer Standardabweichung von 0,12 cm.

1) Die maximal zulässige Abweichung vom Erwartungswert ist ± 0,15 cm. Ermittle, mit wie viel Ausschuss man rechnen muss.

2) Berechne, innerhalb welcher symmetrisch um μ gelegenen Grenzen 90 % der Längen der Dessertgabeln zu erwarten sind. Veranschauliche diesen symmetrischen Bereich mithilfe der Dichtefunktion.

3) Erkläre, ob der Zufallsstreubereich länger oder kürzer wird, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α erhöht wird.

ABD **9.6** Der Hersteller eines neuen Druckermodells behauptet, dass die Dauer des Bedruckens einer Seite im Fotodruck normalverteilt ist mit $\mu = 5,5$ s und $\sigma = 0,2$ s. Es wird eine Stichprobe von 30 Druckern getestet und eine mittlere Druckdauer von 5,2 s bestimmt. Ermittle den zweiseitigen Zufallsstreubereich für $\alpha = 5$ %. Argumentiere anhand dieses Bereichs, ob die Behauptung des Herstellers über die Druckdauer zutreffen kann.

AB **9.7** Die Durchmesser von Stahlstäben einer Produktion sind normalverteilt mit $\mu = 5,4$ cm und $\sigma = 2$ mm.

1) Bestimme den zweiseitigen 99-%-Zufallsstreubereich für die Stabdurchmesser.

2) Welchen Durchmesser haben 95 % der Stahlstäbe mindestens bzw. höchstens?

3) Die Durchmesser von 20 verschiedenen Stahlstäben werden gemessen. Gib an, wie groß der zugehörige Stichprobenmittelwert mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1$ % mindestens bzw. höchstens ist.

9.1.2 Zufallsstreubereiche der Binomial- und Poisson-Verteilung

Einer Lieferung mit einem mittleren Fehleranteil von p wird eine Stichprobe vom Umfang n entnommen. Mithilfe der Binomialverteilung lässt sich berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der fehlerhaften Stück einen vorgegebenen Wert nicht übersteigt. Nun soll jener Bereich angegeben werden, in dem die Anzahl fehlerhafter Stücke aus dieser Stichprobe mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit liegt. Die Ermittlung dieses Zufallsstreubereichs (ZSB) wird nun anhand von Beispielen erklärt.

- **Zweiseitiger Zufallsstreubereich**

  ZB: Aus einer Grundgesamtheit mit p = 4 % wird eine Stichprobe vom Umfang n = 120 entnommen. Es soll ermittelt werden, **in welchem Bereich** die Anzahl der fehlerhaften Stücke mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % (oder mehr) liegt. Dazu tabelliert man die Werte der Verteilungsfunktion G.

x	g(x)	G(x)
0	0,0075	0,0075
1	0,0373	0,0447
2	0,0924	0,1372
3	0,1515	0,2887
4	0,1846	0,4733
5	0,1785	0,6518
6	0,1425	0,7943
7	0,0967	0,8910
8	0,0569	0,9479
9	0,0295	0,9774
10	0,0137	0,9911
11	0,0057	0,9968

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe einen Wert außerhalb des gesuchten Bereichs liefert, soll kleiner als 10 % sein. Daher muss den im Diagramm rot markierten Werten der Zufallsvariablen eine Gesamtwahrscheinlichkeit von jeweils maximal 5 % entsprechen.

Der **erste Wert** des grünen Bereichs ist also jener, für den G **erstmals größer gleich 5 %** ist. Der **letzte Wert** des grünen Bereichs ist jener, für den G **erstmals größer als 95 %** ist. Der zweiseitige 90-%-Zufallsstreubereich ist der Bereich von 2 bis 9 fehlerhafte Stück. Er kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden.

- **Einseitig nach unten begrenzter Zufallsstreubereich**

  ZB: Aus einer Grundgesamtheit mit p = 4 % wird eine Stichprobe vom Umfang n = 120 entnommen. Es soll ermittelt werden, mit wie vielen fehlerhaften Stücken man **mindestens** mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % oder mehr rechnen muss. Man tabelliert die Werte der Verteilungsfunktion G.

x	g(x)	G(x)
0	0,0075	0,0075
1	0,0373	0,0447
2	0,0924	0,1372
3	0,1515	0,2887
4	0,1846	0,4733
5	0,1785	0,6518
6	0,1425	0,7943
7	0,0967	0,8910
8	0,0569	0,9479
9	0,0295	0,9774
10	0,0137	0,9911
11	0,0057	0,9968

In diesem Fall darf der rot markierte Bereich weniger als 10 % Wahrscheinlichkeit darstellen. Der **erste Wert** des grünen Bereichs ist also jener, für den **erstmals** gilt:
$G(x) \geqslant 0{,}1$

Aus der Tabelle erkennt man, dass der einseitig nach unten begrenzte ZSB mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α = 10 % der Bereich von 2 bis 120 fehlerhaften Stücken ist. Die obere Grenze des Bereichs ergibt sich aus dem Stichprobenumfang.

- **Einseitig nach oben begrenzter Zufallsstreubereich**

  ZB: Aus einer Grundgesamtheit mit p = 4 % wird eine Stichprobe vom Umfang n = 120 entnommen. Es soll berechnet werden, mit wie vielen fehlerhaften Stücken man mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit **höchstens** rechnen muss.

x	g(x)	G(x)
0	0,0075	0,0075
1	0,0373	0,0447
2	0,0924	0,1372
3	0,1515	0,2887
4	0,1846	0,4733
5	0,1785	0,6518
6	0,1425	0,7943
7	0,0967	0,8910
8	0,0569	0,9479
9	0,0295	0,9774
10	0,0137	0,9911
11	0,0057	0,9968

In diesem Fall darf die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Wert außerhalb des gesuchten Bereichs liegt, weniger als 10 % betragen. Daher ist der **letzte Wert**, der zum gesuchten Bereich gehört, **der erste, der größer gleich 90** % ist.

Da für höchstens 8 fehlerhafte Stück die Wahrscheinlichkeit erstmals größer gleich 90 % ist, liegen die Werte 9, 10, 11, … außerhalb des gesuchten Zufallsstreubereichs. Der einseitig nach oben begrenzte 90-%-Zufallsstreubereich ist der Bereich von 0 bis 8 fehlerhaften Stücken.

Für poissonverteilte Daten geht man analog vor. Auch hier werden die Werte der zugehörigen Verteilungsfunktion zuerst tabelliert und die entsprechenden Werte aus der Tabelle abgelesen.

ABCD **9.8** In einem Betrieb haben 8 % der Stoffballen einen Materialfehler und sind daher zur Weiterverarbeitung ungeeignet. Eine Stichprobe vom Umfang n = 50 wird aus einer großen Lieferung entnommen.

1) Berechne, in welchem Bereich die Anzahl der Stoffballen mit Materialfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % liegt.

2) Erkläre, wie sich die Bereichsgrenzen verändern, wenn eine Wahrscheinlichkeit von 95 % gewählt wird.

3) Ermittle, wie viele fehlerhafte Stoffballen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$ in dieser Stichprobe **a)** höchstens, **b)** mindestens vorkommen.

ABCD **9.9** Eine Firma produziert USB-Sticks. Erfahrungsgemäß sind 3 % der erzeugten Sticks fehlerhaft.

1) Ermittle, mit wie vielen defekten USB-Sticks man mit 90%iger Wahrscheinlichkeit in einer Stichprobe vom Umfang n = 60 rechnen kann.

2) Erkläre, wie sich die Bereichsgrenzen verändern, wenn

a) der Umfang der Stichprobe erhöht wird.

b) der Prozentsatz der fehlerhaften USB-Sticks höher ist.

ABC **9.10** Eine bestimmte Tankstelle wird durchschnittlich von 9,3 Autofahrern pro Stunde angefahren. Ermittle, mit wie vielen Autofahrern man zwischen 13:00 Uhr und 16:00 Uhr mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\,\%$

a) mindestens rechnen kann. **b)** rechnen kann. **c)** höchstens rechnen kann.

ABC **9.11** Im Mittel befinden sich zwei Lackfehler auf einem Fahrrad einer bestimmten Fahrradserie.

1) Berechne, wie viele Fehler es auf einem Fahrrad mit 90%iger Wahrscheinlichkeit

a) höchstens gibt. **b)** mindestens gibt.

2) Gib einen zweiseitigen 90-%-Zufallsstreubereich für die Anzahl der Lackfehler auf einem Fahrrad an.

9.2 Vertrauensbereiche – Konfidenzintervalle

In vielen Fällen werden ausgehend von einer Stichprobe Aussagen über die Grundgesamtheit abgeleitet, zum Beispiel bei der Auswertung von Messdaten oder Meinungsumfragen. Man bestimmt dabei einen Bereich, in dem der jeweilige Parameter der Grundgesamtheit mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit liegt. Der Bereich, in dem der Parameter liegt, wird **Vertrauensbereich** oder **Konfidenzintervall** genannt.

9.2.1 Vertrauensbereiche der Normalverteilung

Bei der Ermittlung von Vertrauensbereichen für die Parameter der Normalverteilung aus den Parametern einer Stichprobe ist zu unterscheiden, welche Informationen über die Grundgesamtheit bereits vorliegen.

Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ bei bekannter Standardabweichung σ

Es liegt eine Stichprobe vom Umfang n mit dem Mittelwert $\bar{x}$ vor. Die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit ist bekannt, der Erwartungswert μ hingegen ist unbekannt. Die vorliegende Stichprobe dieser Normalverteilung mit unbekanntem μ liegt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ im ZSB. Daher gilt:

$$\mu - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Der Bereich, in dem der gesuchte Erwartungswert μ mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ liegt, kann daher aus den Formeln für den ZSB hergeleitet werden:

$$\mu_{unten} = \mu_u = \bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \mu_{oben} = \mu_o = \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für μ bei bekanntem σ

$\mu_{o,u} = \bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ zweiseitiger $(1 - \alpha)$-Vertrauensbereich

α … Irrtumswahrscheinlichkeit

Bemerkungen:
- $(1 - \alpha)$ wird als **Vertrauensniveau** oder **Sicherheit** bezeichnet.
- Auch bei Vertrauensbereichen wird zwischen zweiseitig und einseitig unterschieden. Die einseitigen Vertrauensbereiche erhält man durch Ersetzen von $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ durch $u_{1-\alpha}$ in der angegebenen Formel.

9.12 Eine Maschine stellt Glasrohre her, deren Durchmesser normalverteilt ist mit $\sigma = 0{,}03$ mm. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ weist einen Mittelwert $\bar{x} = 10{,}05$ mm auf. Ermittle den Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit auf dem Vertrauensniveau $(1 - \alpha) = 95\,\%$.

AB

Lösung:

$\mu_u = \bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \mu_o = \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mu_u = 10{,}05 - u_{0{,}975} \cdot \frac{0{,}03}{\sqrt{20}} \approx 10{,}05 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}03}{\sqrt{20}} = 10{,}0368...$

$\mu_o = 10{,}05 + u_{0{,}975} \cdot \frac{0{,}03}{\sqrt{20}} \approx 10{,}05 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}03}{\sqrt{20}} = 10{,}0631...$

Der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit liegt mit 95%iger Sicherheit im Bereich [10,04 mm; 10,06 mm].

Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ bei unbekannter Standardabweichung σ

In der Praxis weiß man von einer Größe oft nur, dass sie normalverteilt ist, man kennt aber weder ihren Erwartungswert μ noch ihre Standardabweichung σ. In diesem Fall muss der Parameter σ der Grundgesamtheit durch die Standardabweichung s der entnommenen Stichprobe geschätzt werden. Weniger Information über die Grundgesamtheit bedeutet, dass der Vertrauensbereich für μ in diesem Fall „breiter" wird als bei bekanntem σ.

Zur Bestimmung des Vertrauensbereichs verwendet man eine Verteilung, die man als „Verallgemeinerung" der Normalverteilung bezeichnen kann. Die **t-Verteilung** („**Student-Verteilung**") ist eine symmetrische Verteilung, die für $n \to \infty$ in die Standardnormalverteilung übergeht. Sie wurde nach dem englischen Statistiker William Gosset (1876 – 1937, Pseudonym „Student") benannt.

f = 50
f = 5
t

Die Dichtefunktion der t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad $f = n - 1$ ist mithilfe der Gammafunktion (siehe Band 3, Seite 212) definiert. Die Werte werden technologieunterstützt ermittelt oder aus Tabellen entnommen.

In den Formeln für die Ermittlung des Vertrauensbereichs wird σ durch s ersetzt. Anstelle der jeweiligen Schwellenwerte der u-Verteilung werden nun jene der t-Verteilung verwendet.

Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für μ bei unbekanntem σ

$\mu_{o,u} = \bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ zweiseitiger $(1 - \alpha)$-Vertrauensbereich

α … Irrtumswahrscheinlichkeit

Technologieeinsatz: t-Verteilung
TI-Nspire

Mathcad, GeoGebra: www.hpt.at

Im Menü **6: Statistik**, **5: Verteilungen** kann die inverse t-Verteilung unter **6: Inverse t...** aufgerufen werden. Die entsprechenden Parameter können dann entweder in der Eingabemaske oder direkt über **invt(Fläche, FreiGrad)** eingegeben werden.

Inverse t
Fläche:
Freiheitsgrad, FreiGrad:
OK Abbruch

AB

9.13 In einer Fabrik werden Kupferrohre maschinell hergestellt, deren Durchmesser normalverteilt sind. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ weist einen Mittelwert von $\bar{x} = 10{,}05$ mm und eine Standardabweichung von $s = 0{,}052$ mm auf. Ermittle den Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit auf dem Vertrauensniveau $(1 - \alpha) = 99\ \%$.

Lösung:

$\mu_u = \bar{x} - t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$t_{19;\,0{,}995} = 2{,}86093...$ • $f = n - 1 = 19, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$

invt(0.995,19) 2.86093

$\mu_u = 10{,}05 - 2{,}86093... \cdot \frac{0{,}052}{\sqrt{20}} = 10{,}0167...$

$\mu_o = \bar{x} + t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 10{,}05 + 2{,}86093... \cdot \frac{0{,}052}{\sqrt{20}} = 10{,}0832...$

Der Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ lautet: $10{,}017 \text{ mm} \leq \mu \leq 10{,}083 \text{ mm}$.

Vertrauensbereich für die Standardabweichung σ

Werden aus einer annähernd normalverteilten Grundgesamtheit Stichproben vom Umfang n entnommen und aus jeder Stichprobe die Varianz s^2 bestimmt, lässt sich die Verteilung dieser Varianzen durch die χ^2-Verteilung beschreiben (siehe Abschnitt 8, Seite 216).

Mithilfe dieser Verteilung ist es möglich, über die Prüfgröße $x_{prüf}$ einen Zusammenhang zwischen der Standardabweichung σ der Grundgesamtheit und der Standardabweichung s der Stichprobe anzugeben:

$x_{prüf} = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$ • $x_{prüf}$ ist χ^2-verteilt mit f = n – 1 Freiheitsgraden

$\chi^2_{f;1-\frac{\alpha}{2}} = f \cdot \frac{s^2}{\sigma_u^2}$ bzw. $\chi^2_{f;\frac{\alpha}{2}} = f \cdot \frac{s^2}{\sigma_0^2}$

Durch Umformen erhält man die Formeln für den Vertrauensbereich für σ.

Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für σ

$\sigma_u = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;1-\frac{\alpha}{2}}}}$; $\sigma_o = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;\frac{\alpha}{2}}}}$ zweiseitiger (1 – α)-Vertrauensbereich

α … Irrtumswahrscheinlichkeit

9.14 Mandarinenspalten werden in Dosen angeboten. Auf dem Etikett ist ein Abtropfgewicht von 600 g angegeben. Man kann davon ausgehen, dass die Massen normalverteilt sind. Bei einer Stichprobe von zehn Dosen erhält man folgende Abtropfgewichte in g:

604,1 597,8 603,1 600,2 601,9 596,3 594,7 603,4 601,3 602,1

Ermittle den 90-%-Vertrauensbereich für die Standardabweichung σ.

AB TE

Lösung:

n = 10 • Stichprobenumfang

$\bar{x} = 600{,}49$ g • Berechnung des Stichprobenmittelwerts

$s^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - 600{,}49)^2$ • Berechnung der Stichprobenvarianz

s = 3,196… g • Standardabweichung der Stichprobe

$\sigma_u = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;1-\frac{\alpha}{2}}}}$; $\chi^2_{9;\,0,95} = 16{,}918\ldots$ • Freiheitsgrad: f = n – 1 = 9

$\sigma_u = 3{,}196\ldots \cdot \sqrt{\frac{9}{16{,}918\ldots}} = 2{,}331\ldots$ • invχ²(0.95,9) 16.9189776043

$\sigma_o = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;\frac{\alpha}{2}}}}$; $\chi^2_{9;\,0,05} = 3{,}325\ldots$

$\sigma_o = 3{,}196\ldots \cdot \sqrt{\frac{9}{3{,}325\ldots}} = 5{,}258\ldots$ • invχ²(0.05,9) 3.32511284329

Der 90-%-Vertrauensbereich für σ lautet: 2,33 g ⩽ σ ⩽ 5,26 g

9.15 Kreuze die richtige Behauptung an.

C

Je kleiner das Signifikanzniveau (1 – α) ist, umso länger ist das Konfidenzintervall.	☐
Die Länge des Konfidenzintervalls hängt vom Zufall ab.	☐
Wenn σ bekannt ist, ist das Konfidenzintervall für μ länger als bei unbekanntem σ.	☐
Das Konfidenzintervall für σ hängt nicht von μ ab.	☐
Das Konfidenzintervall wird länger, wenn $\bar{x}$ größer wird.	☐

Beurteilende Statistik

AB **9.16** Die Durchmesser von Drehteilen sind normalverteilt mit σ = 0,02 cm. Es wird eine Stichprobe vom Umfang n = 15 entnommen und ein Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ von 1,1 cm bestimmt. Ermittle den 90-%-Vertrauensbereich für μ.

AB **9.17** Einer Lieferung von Zwirnen wird eine Stichprobe von 16 Stück entnommen und eine mittlere Drehung $\bar{x}$ von 120 Touren pro Meter ermittelt. Die Standardabweichung aller Drehungen beträgt 7,4 Touren pro Meter. Ermittle das 95-%-Konfidenzintervall für μ.

ABD **9.18** Ein Kaffeeautomat füllt laut Hersteller 200 ml pro Tasse ab. Die Genauigkeit des Automaten wird anhand der folgenden Stichprobe überprüft (Werte in ml):

203 201 199 195 193 195 202 207 208

1) Beschreibe, wie der 95-%-Vertrauensbereich für μ ermittelt werden kann.
2) Überprüfe, ob der 95-%-Vertrauensbereich für μ den angegebenen Wert des Herstellers einschließt.
3) Erkläre, wie sich der Vertrauensbereich ändert, wenn der Stichprobenumfang vervierfacht wird.

ABD **9.19** Die Abfüllmenge von Maschinenöl ist normalverteilt. Die Genauigkeit der Abfüllanlage wird anhand einer Stichprobe überprüft und ergibt folgende Werte in ml:

96 97 104 103 103 99 101 97

1) Ermittle den Vertrauensbereich für μ mit α = 5 %. Überprüfe, ob der vom Hersteller angegebene Erwartungswert μ = 104 ml in diesem Bereich liegt.
2) Bestimme den 99%igen Vertrauensbereich für die Standardabweichung.
3) Beschreibe, wie sich die Länge des Konfidenzintervalls für μ bzw. σ ändert, wenn α geändert wird.

ABC **9.20** In die Abwasseranlage eines Industriebetriebs wird ein Filter eingebaut. Vor dem Einbau des Filters betrug der Erwartungswert des Zinkgehalts im Abwasser 22 $\frac{mg}{L}$ und die Standardabweichung 1,12 $\frac{mg}{L}$. Nun soll überprüft werden, ob sich der Zinkgehalt geändert hat. Zur Überprüfung werden 15 Abwasserproben entnommen. Man erhält einen mittleren Zinkgehalt von 20,9 $\frac{mg}{L}$. Ermittle das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert. Überprüfe, ob sich der Zinkgehalt nach dem Einbau geändert hat.

ABC **9.21** Die Abfüllmenge von Futtersäcken ist normalverteilt mit μ = 4,10 kg. Aufgrund durchgeführter Wartungsarbeiten kann nicht ausgeschlossen werden, dass sich die mittlere Füllmenge μ verändert hat. Zur Überprüfung wird eine Stichprobe von 10 Säcken entnommen (Werte in kg):

4,08 3,99 4,02 4,05 3,95 4,00 4,01 3,98 4,20 4,15

Berechne sowohl den 95-%- als auch den 99-%-Vertrauensbereich für μ und interpretiere die Ergebnisse.

ABD **9.22** Die Masse von Zementsäcken ist annähernd normalverteilt.

1) Bei einer Kontrolle von 10 Zementsäcken wurden folgende Werte festgestellt:
$\bar{x}$ = 20,15 kg und s = 43 dag
Ermittle jeweils den 95-%-Vertrauensbereich für μ und σ.
2) Ermittle jeweils den 95-%-Vertrauensbereich für μ und σ für eine weitere Stichprobe mit 20 Zementsäcken, für die man denselben Mittelwert und dieselbe Standardabweichung wie in **1)** erhält. Erkläre den Unterschied zu **1)**.
3) Wie groß müsste der Umfang einer Stichprobe sein, um den Mittelwert μ mit einer Sicherheit von 99 % auf ± 10 dag angeben zu können, wenn σ = 39 dag beträgt?

9.2.2 Vertrauensbereich der Binomialverteilung

Der Vertrauensbereich für den Parameter p einer binomialverteilten Grundgesamtheit kann mithilfe von Stichproben ermittelt werden. Um einen ersten Schätzwert $\hat{p}$ für den Parameter p zu erhalten, zieht man eine Stichprobe vom Umfang n. Dividiert man die absolute Häufigkeit x, mit der das untersuchte Merkmal auftritt, durch den Stichprobenumfang n, erhält man die relative Häufigkeit $\hat{p} = \frac{x}{n}$ als ersten Schätzwert für p.

ZB: In einer Stichprobe vom Umfang n = 50 Stück werden x = 4 fehlerhafte Stücke gefunden. Man möchte ermitteln, in welchem Bereich der Schlechtanteil p in der Grundgesamtheit mit einer Sicherheit von $1 - \alpha = 95\ \%$ zu erwarten ist.

Schätzwert: $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{4}{50} = 8\ \%$

Das Ergebnis „4 fehlerhafte Stück" wäre auch für eine Grundgesamtheit plausibel, die einen etwas größeren oder kleineren Schlechtanteil aufweist. Daher ermittelt man ein Intervall um $\hat{p}$, innerhalb dessen der wahre Wert für p mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit liegt.
Man ermittelt zunächst den kleinstmöglichen Wert für p, sodass die vorliegende Stichprobe mit x = 4 gerade noch im zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich liegt.
Es gilt: $P(X \leqslant 4) = G(4; 50, p) \geqslant 0{,}975 \Rightarrow G(3; 50, p) < 0{,}975$

Man erhält folgende Gleichung: $\sum_{k=0}^{3} \binom{50}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{50-k} = 0{,}975$

Diese Gleichung kann nur mithilfe von Technologie zB Ti-Nspire mit dem Befehl **nsolve** gelöst werden.

Man erhält für p = 0,022228...

Ist also $p \geqslant 2{,}22\ \%$, so liegt die Fehleranzahl x = 4 gerade noch im 95-%-Zufallsstreubereich.

Den größtmöglichen Wert für p erhält man, indem man von x = 4 als kleinstmögliche Fehleranzahl im 95-%-ZSB ausgeht.
Es gilt: $P(X \leqslant 4) = G(4; 50, p) \leqslant 0{,}025$

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{50}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{50-k} = 0{,}025$$

p = 0,192343...

Bei einem Wert von $p \leqslant 19{,}23\ \%$ liegt die Fehleranzahl x = 4 gerade noch im 95-%-ZSB.
Man kann daher von einem Vertrauensbereich für den Schlechtanteil p zwischen 2,22 % und 19,23 % ausgehen.

(1 – α)-Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für den Anteil p der Binomialverteilung

x … Anzahl der fehlerhaften Stück

$G(x-1; n, p_u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\qquad$ $G(x; n, p_o) = \frac{\alpha}{2}$

p_u: $\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\qquad$ p_o: $\sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{\alpha}{2}$

Wenn der Stichprobenumfang genügend groß ist, kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit $\mu = n \cdot \hat{p}$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}$ genähert werden (siehe 8.5.4).

Aus der Formel für den Zufallsstreubereich (siehe Seite 229) erhält man:

$$x_o = \mu + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \;\Rightarrow\; x_o = n \cdot \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \;\Rightarrow\; \frac{x_o}{n} = \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{n} \;\Rightarrow$$

$$p_o = \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{n} \;\Rightarrow\; p_o = \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$$

Für p_u gelten analoge Überlegungen.

Die so erhaltenen Prozentsätze ergeben annähernd die direkt durch die Binomialverteilung ermittelten. Diese Näherung wird in der Praxis oft verwendet. Jedoch muss die Bedingung für die Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung für p_u und p_o erfüllt sein. In diesem Fall gilt:

Näherungsweise Berechnung des Anteils p aus der Schätzung $\hat{p}$

$$p_u = \hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}, \quad p_o = \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \quad \text{mit } \hat{p} = \frac{x}{n}$$

Die Bedingung $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ muss für p_u und für p_o erfüllt sein.

AB **9.23** In einer Stichprobe vom Umfang n = 1 000 wurden 80 fehlerhafte Teile gefunden. Ermittle näherungsweise den Vertrauensbereich für den unbekannten Fehleranteil p mit $\alpha = 5\,\%$.

Lösung:

$\hat{p} = \frac{x}{n} = 0{,}08$; $u_{0,975} = 1{,}959...$ • $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975}$

$$p_u = \hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} = 0{,}08 - 1{,}959... \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{1\,000}} = 0{,}06318... \approx 6{,}3\,\%$$

$$p_o = \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} = 0{,}08 + 1{,}959... \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{1\,000}} = 0{,}09681... \approx 9{,}7\,\%$$

Überprüfung der Bedingung $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$:

$1\,000 \cdot 0{,}06318 \cdot (1 - 0{,}06318) = 59{,}19 > 9$; $1\,000 \cdot 0{,}09681 \cdot (1 - 0{,}09681) = 87{,}44 > 9$

Der gesuchte Fehleranteil p liegt mit 95%iger Sicherheit zwischen 6,3% und 9,7%.

In der Praxis stellt sich oft die Frage, wie groß eine Stichprobe sein muss, um einen Vertrauensbereich mit vorgegebener Länge (Schwankungsbreite) angeben zu können.
ZB: Mittels einer Umfrage möchte man das Interesse der Bevölkerung an der Errichtung einer Parkgarage mit 90%iger Sicherheit auf ± 2 % genau vorhersagen. Man erhält:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \leq 0{,}02$$ • Ungleichung für die Abweichung

$$n \geq \left(\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{0{,}02}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$$ • $u_{0,95} = 1{,}64485$

$$n \geq 6\,763{,}83 \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$$

Da $\hat{p}$ noch unbekannt ist, kann man vorerst keine konkrete Aussage treffen. Kann $\hat{p}$ auch nicht durch eine Schätzung ermittelt werden, verwendet man in der Praxis den Wert $\hat{p} = 0{,}5$, da der Term auf der rechten Seite dann ein Maximum annimmt (siehe Aufgabe 9.30). Mit dieser Annahme kann ein möglicher, aber wahrscheinlich zu großer Wert für n angegeben werden, in diesem Beispiel also $6\,763{,}83 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \approx 1\,691$ Personen.

9.24 Bei der Überprüfung von 300 Platinen findet man 50 fehlerhafte. Ermittle näherungsweise das 95-%-Konfidenzintervall für den Anteil an fehlerhaften Platinen. AB

9.25 Eine Verpackungsfirma benötigt spezielle Kartons. Aus einer Lieferung wird eine Stichprobe von 50 Kartons entnommen, wobei drei beschädigte gefunden werden. ABC

1) Bestimme den zweiseitigen Vertrauensbereich für den Anteil der beschädigten Kartons für $1 - \alpha = 90\ \%$.

2) Ermittle den zweiseitigen Vertrauensbereich für den Anteil der beschädigten Kartons für $1 - \alpha = 99\ \%$ und erkläre den Unterschied zu ***1)***.

3) Eine weitere Stichprobe mit dreifachem Umfang wird untersucht und enthält dreimal so viele fehlerhafte Kartons. Vergleiche den 90%igen Vertrauensbereich mit jenem aus ***1)***. Interpretiere das Ergebnis.

9.26 Die Bürgermeisterin einer Stadt beauftragt ein Meinungsforschungsinstitut, in der Bevölkerung den Anteil der Personen, die sich für die Errichtung einer neuen Parkanlage aussprechen, auf ± 2 % genau mit einer Sicherheit von 99 % zu bestimmen. ABC

1) Ermittle, wie viele Personen befragt werden müssen, wenn man davon ausgeht, dass es 70 % Befürworter für den Park gibt.

2) Berechne, wie man die Anzahl der Befragten ändern muss, damit sich die Schwankungsbreite der Vorhersage halbiert.

3) Beschreibe allgemein den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und Schwankungsbreite.

9.27 Bei einer Befragung von 250 Einwohnerinnen und Einwohnern einer Stadt gaben 2 % an, mit dem neuen Einkaufszentrum nicht zufrieden zu sein. ABC

1) Ermittle den relativen Anteil aller Einwohnerinnen und Einwohner der Stadt, die mit dem neuen Einkaufszentrum zufrieden sind, mit 95%iger Sicherheit.

2) Wie viele Personen müssen befragt werden, wenn man den Anteil der Personen, die mit dem neuen Einkaufszentrum nicht zufrieden sind, mit einer Schwankungsbreite von 3% mit einer Sicherheit von 95% angeben möchte?

9.28 Bei einer Umfrage zu Beginn der Eis-Saison haben 27 % aller Bewohnerinnen und Bewohner eines Gemeindebezirks angegeben, den Eissalon Lottoberti zu kennen. ABC

1) Nach einer Werbekampagne im nahegelegenen Kinocenter wird eine Befragung durchgeführt. Von 1 000 Personen kennen nun 302 den Eissalon. Beurteile die Wirkung der Werbung.

2) In einem anderen Bezirk hat eine Befragung von 100 Personen ergeben, dass 18 davon den Eissalon kennen. Ermittle, in welchem Bereich der Bekanntheitsgrad des Eissalons mit 95%iger Sicherheit liegt. Rechne genau und näherungsweise.

9.29 In einer Stadt wurde festgestellt, dass 45 von 100 Erwachsenen in ihrer Freizeit gerne ins Museum gehen. Mit welcher Sicherheit kann man daraus schließen, dass 40 % bis 50 % aller Erwachsenen in ihrer Freizeit gerne ins Museum gehen? AB

9.30 Zeige, dass die Ermittlung des Stichprobenumfangs n bei vorgegebener Breite des Vertrauensbereichs für $\hat{p} = 0{,}5$ auf den größten Wert für n führt. ABD

9.3 Statistische Tests

9.3.1 Prinzip des Alternativtests

Eine der wichtigsten Anwendungen der Statistik ist das Testen von Hypothesen (griechisch: „hypóthesis“ = Unterstellung) mithilfe von Stichproben. Solche Hypothesen können zum Beispiel Aussagen über die Parameter einer Verteilung oder Vermutungen über die Art einer Verteilung sein. Man kann mittels Stichprobentests zwar nicht die Gültigkeit einer Hypothese beweisen oder widerlegen, aber man kann eine Aussage über das Risiko der Fehleinschätzung machen.

ABC TE

9.31 Ein Supermarkt wirbt mit einem Gewinnspiel und behauptet, dass an einem bestimmten Tag 30 % aller Kunden einen Gutschein gewinnen würden. 25 Schülerinnen und Schüler gehen in der Mittagspause dort einkaufen, aber niemand gewinnt einen Gutschein.

1) Ermittle den 90-%-Zufallsstreubereich für die Anzahl der zu erwartenden Gutscheine unter 25 Kunden, falls die Chance zu gewinnen wirklich 30 % beträgt.

2) Interpretiere das Ergebnis.

Anhand eines konkreten Beispiels werden nun der Ablauf eines statistischen Tests und die dabei möglichen Fehlerarten untersucht.

An ein Restaurant werden nicht gekennzeichnete Kisten mit Früchten geliefert. Ein Teil der Kisten ist von 1. Qualität und enthält 10 % Ausschuss, der Rest der Kisten ist von 2. Qualität mit 35 % Ausschuss.
Über die Qualität einer zufällig ausgewählten Kiste gibt es zwei mögliche Annahmen:
Nullhypothese H_0: Es handelt sich um eine Kiste mit 10 % Ausschuss: $\mathbf{H_0}$ … $p_1 = 0,10$
Alternativhypothese H_A: Es handelt sich um eine Kiste mit 35 % Ausschuss: $\mathbf{H_A}$ … $p_2 = 0,35$

Die Entscheidung, von welcher Qualität eine zufällig ausgewählte Kiste ist, soll anhand einer Stichprobe getroffen werden. Es wird folgender **statistische Test** durchgeführt:
10 Früchte aus der gewählten Kiste werden untersucht. Die Anzahl X der minderwertigen Früchte ist binomialverteilt mit $p_1 = 0,10$, falls die Kiste von 1. Qualität ist, oder mit $p_2 = 0,35$, falls die Kiste von 2. Qualität ist. Als Entscheidungsregel wird (vorerst willkürlich) festgelegt:
$X \leq 2$ … **H_0 annehmen**; $X > 2$ … **H_0 verwerfen**, also **H_A annehmen**
Da das Ergebnis der Stichprobe (auch) vom Zufall abhängt, kann die aufgrund dieses Tests erfolgte Entscheidung natürlich auch falsch sein.

Ist die Kiste von 1. Qualität ($p_1 = 0,10$), so entscheidet man **richtig**, wenn die Stichprobe zufällig 0, 1 oder 2 minderwertige Früchte enthält. Man entscheidet **falsch**, wenn sie mehr als 2 minderwertige Früchte enthält.

$p_1 = 0,10$

93 % | 7 %

Ist die Kiste von 2. Qualität ($p_2 = 0,35$), so entscheidet man **richtig**, wenn die Stichprobe zufällig 3 oder mehr minderwertige Früchte enthält. Bei 0, 1 oder 2 minder-wertigen Früchten entscheidet man **falsch**.

$p_2 = 0,35$

26 % | 74 %

Es können also zwei verschiedene Arten von **Fehlentscheidungen** getroffen werden:

Fehler 1. Art

Die Nullhypothese ist richtig, wird aber aufgrund des zufälligen Stichprobenergebnisses verworfen.
In obigem Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, das zu diesem Fehler führt, $\alpha = 7\,\%$. In diesem Beispiel wurde die Entscheidungsregel willkürlich vorgegeben und α konnte berechnet werden. Üblicherweise ist der Weg umgekehrt und die Entscheidungsregel wird anhand eines vorgegebenen Werts von α ermittelt.
α wird **Signifikanzniveau** oder **Irrtumswahrscheinlichkeit** genannt.

Fehler 2. Art

Die Nullhypothese ist falsch (also die Alternativhypothese richtig), wird aber aufgrund des Stichprobenergebnisses für richtig gehalten und angenommen.
Im vorigen Beispiel liegt die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis, das zu diesem Fehler führt, bei $\beta = 26\,\%$. In der Praxis kann β meist nicht berechnet werden, da die Prozentsätze p_1 und p_2 im Allgemeinen nicht bekannt sind.

Beachte:

- Zu jeder Nullhypothese H_0 gehört eine Alternativhypothese H_A, die der Gegenbehauptung zu H_0 entspricht.
- Das Annehmen von H_0 ist **kein** Beweis für die Richtigkeit der Behauptung. Es bedeutet lediglich, dass die Argumente nicht ausreichen, um H_0 zu verwerfen.
  Merkhilfe: „Freispruch aus Mangel an Beweisen"
- Die beiden Fehler kommen durch Berechnung mit verschiedenen Parametern zustande, weisen also keinen rechnerischen Zusammenhang auf.

Zusammenfassend kann man vier mögliche Ausgänge des Tests beobachten:

H_0 trifft zu

H_A trifft zu (H_0 trifft nicht zu)

H_0 wird angenommen. Wahrscheinlichkeit: $1 - \alpha$	H_0 wird abgelehnt. Wahrscheinlichkeit: α **Fehler 1. Art**	H_A wird angenommen. Wahrscheinlichkeit: $1 - \beta$	H_A wird abgelehnt. Wahrscheinlichkeit: β **Fehler 2. Art**

Statistische Tests

Die zu überprüfenden Aussagen werden formuliert:
H_0 ... Nullhypothese, H_A ... Alternativhypothese

Die Entscheidung wird anhand einer Stichprobe auf vorgegebenem Signifikanzniveau α getroffen.

Fehler 1. Art (α-Fehler): Nullhypothese trifft zu, wird aber verworfen.
Fehler 2. Art (β-Fehler): Nullhypothese trifft nicht zu, wird aber angenommen.

Beurteilende Statistik

Prinzip des Tests über den Erwartungswert einer Normalverteilung

Oft stellt sich die Frage, ob der Erwartungswert einer Normalverteilung den vermuteten Wert μ_0 hat oder ob er zum Beispiel durch die Wartung einer Maschine verändert wurde. Anhand einer Stichprobe soll untersucht werden, ob bzw. wie sich der Erwartungswert einer Grundgesamtheit verändert hat. Je nach Fragestellung werden Tests mit folgender Null- bzw. Alternativhypothese durchgeführt.

- „Hat sich der Erwartungswert verändert?"
  Da bei dieser Frage sowohl eine Vergrößerung als auch Verkleinerung des Erwartungswerts untersucht werden soll, wird ein **zweiseitiger Test** durchgeführt.
  Nullhypothese H_0: $\mu = \mu_0$ … der Erwartungswert hat sich nicht verändert
  Alternativhypothese: H_A: $\mu \neq \mu_0$
- „Hat sich der Erwartungswert vergrößert?"
  Hier wird ein **einseitiger Test** durchgeführt.
  Nullhypothese H_0: $\mu \leqslant \mu_0$ … der Erwartungswert wurde nicht größer
  Alternativhypothese: H_A: $\mu > \mu_0$
- „Hat sich der Erwartungswert verkleinert?"
  Bei dieser Frage wird ein **einseitiger Test** durchgeführt.
  Nullhypothese H_0: $\mu \geqslant \mu_0$ … der Erwartungswert wurde nicht kleiner
  Alternativhypothese: H_A: $\mu < \mu_0$

Das **Signifikanzniveau** α für einen Fehler 1. Art legt die maximale Wahrscheinlichkeit fest, dass H_0 zu unrecht verworfen wird. Je nach Anwendungsgebiet sind für α die Werte 5 %, 1 % oder 0,1 % üblich. Ergibt der Test, dass die Nullhypothese zu verwerfen ist, so nennt man das Ergebnis statistisch signifikant („überzufällig") auf dem Niveau α.

ZB: Bei einer Abfüllanlage betrug der Erwartungswert vor einer Neueinstellung wegen einer Wartung μ_0 = 503 ml. Aufgrund von Kundenbeschwerden besteht die Befürchtung, dass sich der Erwartungswert nach unten verschoben hat.
Es wird ein einseitiger Test mit der Nullhypothese H_0: $\mu \geqslant \mu_0$ und der Alternativhypothese H_A: $\mu < \mu_0$ durchgeführt.
Er ergibt mit einem Signifikanzniveau von α = 5 %, dass H_0 angenommen wird.
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Test die richtige Nullhypothese verworfen wird, ist höchstens 5 %. Daher anders ausgedrückt: Ist der Erwartungswert nicht kleiner als 503 ml geworden, so wird das mit diesem Text mit 95% Sicherheit erkannt.

A **9.32** In einer Tischlerei wird vermutet, dass sich der Erwartungswert μ_0 = 400 mm der Längen von Holzbrettern verändert hat. Stelle die Null- und die Alternativhypothese auf.

AC **9.33** Bei der Abfüllung von Dosenfrüchten ist das Abtropfgewicht normalverteilt mit einem Erwartungswert μ_0 = 700 g. Nach der Reinigung der Anlage wird bei einer Stichprobe ein Mittelwert $\bar{x}$ = 720 g festgestellt.

1) Stelle die sich daraus ergebenden Hypothesen auf.

2) Bei einer weiteren Stichprobe ergab sich ein Mittelwert $\bar{x}$ von 698 g. Es wurde ein Test mit der Nullhypothese H_0: $\mu = \mu_0$ und der Alternativhypothese H_A: $\mu \neq \mu_0$ durchgeführt. Er ergab, dass auf einem Signifikanzniveau von α = 1 % H_0 abzulehnen ist. Interpretiere das Ergebnis.

Aufgaben zum Test über den Erwartungswert folgen im nächsten Abschnitt.

9.3.2 Durchführung eines Tests über den Erwartungswert

Bei der Durchführung eines Tests über den Erwartungswert einer Normalverteilung geht man von einer Stichprobe vom Umfang n mit dem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ aus. Die Entscheidung über die Annahme einer Hypothese kann mithilfe einer **Prüfgröße** oder eines **Annahme-** bzw. eines **Ablehnungsbereichs** erfolgen. Wird mit Prüfgrößen gearbeitet, so muss die Prüfgröße mit dem durch α bestimmten Schwellenwert, dem so genannten **kritischen Wert**, verglichen werden.

Es gilt: $|\text{Prüfgröße}| \leq$ kritischer Wert $\Rightarrow$ H_0 annehmen
$|\text{Prüfgröße}| >$ kritischer Wert $\Rightarrow$ H_0 verwerfen

Bei der Berechnung muss unterschieden werden, ob die Standardabweichung der Grundgesamtheit bekannt oder unbekannt ist.

Standardabweichung σ bekannt – u-Test (z-Test)

Ist die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt, so entspricht der Test der Ermittlung des Vertrauensbereichs für μ bei bekanntem σ. Man arbeitet mit der **Normalverteilung**. Für die Prüfgröße gilt daher: $u_{prüf} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Bemerkung: In der englischen Literatur wird üblicherweise z anstelle von u verwendet.

ZB: Bei einem Getränkeautomaten werden die Getränke mit einem Erwartungswert von $\mu_0 = 250$ ml und einer Standardabweichung von $\sigma = 3$ ml abgefüllt. Nach einer Wartung wird vermutet, dass sich der Erwartungswert verändert hat. Es wird ein Test anhand der vorliegenden Stichprobe mit $\alpha = 5\,\%$ durchgeführt (Werte in ml):
258,3 252,1 251,4 246,5 248,2 255,9 247,3 256,9 253,2 257,3

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 252{,}71$ ml

1) Hypothesen aufstellen
H_0: $\mu = \mu_0$
H_A: $\mu \neq \mu_0$

- Da sowohl eine Verkleinerung als auch eine Vergrößerung von μ möglich ist und untersucht werden soll, wird ein zweiseitiger Test durchgeführt.

2) Prüfgröße und kritischen Wert ermitteln

$$u_{prüf} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{252{,}71 - 250}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 2{,}8565...$$

$$\alpha = 5\,\% \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1{,}95996...$$

- Der kritische Wert ist der Schwellenwert $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

3) Entscheidung treffen
$u_{prüf} > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen, H_A annehmen

Da $u_{prüf}$ außerhalb des durch α gegebenen Annahmebereichs liegt, muss man von einer Veränderung des Erwartungswerts ausgehen. Die Abweichung vom Erwartungswert ist mit 5 % signifikant (überzufällig).

- Grafische Veranschaulichung

Wählt man $\alpha = 0{,}1\,\%$, so vergrößert sich der Annahmebereich. Der kritische Wert wäre $u_{0,9995} = 3{,}2905$ und somit würde $u_{prüf} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ gelten. H_0 würde angenommen werden.

u-Test

$u_{prüf} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$|u_{prüf}| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $|u_{prüf}| \leq u_{1-\alpha}$ $\Rightarrow$ H_0 annehmen, H_A verwerfen
$|u_{prüf}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $|u_{prüf}| > u_{1-\alpha}$ $\Rightarrow$ H_0 verwerfen, H_A annehmen

Je kleiner α ist, desto eher wird die Nullhypothese angenommen, allerdings ist dann die Aussagekraft geringer. Darüber gibt der so genannte P-Wert Auskunft.

P-Wert

Als **P-Wert** bezeichnet man jenes Signifikanzniveau, bei dem man H_0 gerade noch verwerfen würde, für das also der kritische Wert mit der Prüfgröße übereinstimmt. Ist der P-Wert kleiner gleich dem gewählten Signifikanzniveau α, so wird die Nullhypothese verworfen. Ist kein Signifikanzniveau angegeben, so sind folgende Bezeichnungen üblich:

$P \geqslant 5\,\%$ ... H_0 bleibt aufrecht
$1\,\% \leqslant P < 5\,\%$ ... „schwach signifikant“, H_A ist wahrscheinlich
$0{,}1\,\% \leqslant P < 1\,\%$ ... „signifikant“, H_A ist sehr wahrscheinlich
$P \leqslant 0{,}1\,\%$ ... „hochsignifikant“, H_A ist praktisch sicher

Für das Beispiel von Seite 243 ergibt sich:
$u_{prüf} = 2{,}8565...$, zu diesem Quantil wird der Prozentsatz berechnet, man ersetzt α durch P in
$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow u_{1-\frac{P}{2}} = 2{,}8565... \Rightarrow 1 - \frac{P}{2} = 0{,}99785... \Rightarrow P = 0{,}00428... \approx 0{,}43\,\%$

Es gilt: $0{,}1\,\% \leqslant P < 1\,\%$. Das bedeutet, dass das Ergebnis signifikant ist. Es ist sehr wahrscheinlich, dass sich der Erwartungswert verändert hat.

Annahme- und Ablehnungsbereich
Anstatt die Prüfgröße zu berechnen, können aus der Stichprobe auch die Grenzen des $(1 - \alpha)$-Vertrauensbereichs für μ, also der **Annahme**- bzw. der **Ablehnungsbereich** ermittelt werden. Liegt μ_0 im Annahmebereich, so kann nicht von einer Veränderung ausgegangen werden und H_0 wird beibehalten. Liegt μ_0 im Ablehnungsbereich, so wird von einer Veränderung ausgegangen und H_0 wird verworfen und H_A als gültig angenommen.
Ist σ der Grundgesamtheit bekannt, so gibt es auch die Möglichkeit, mit dem Zufallsstreubereich für Stichprobenmittelwerte (Irrtumswahrscheinlichkeit α) zu arbeiten. Liegt der Mittelwert $\bar{x}$ der vorliegenden Stichprobe im Zufallsstreubereich, so wird H_0 weiterhin als gültig angesehen, andernfalls wird H_0 verworfen und H_A als gültig angenommen.

Beispiel von Seite 243: $\bar{x} = 252{,}71$ ml, $\alpha = 5\,\%$, $\mu_0 = 250$ ml
zweiseitiger 95-%-Vertrauensbereich: $250{,}85 \text{ ml} \leqslant \mu \leqslant 254{,}57$ ml ... Annahmebereich
μ_0 liegt nicht im Vertrauensbereich der Stichprobe, H_0 wird daher verworfen und H_A akzeptiert.

TE

Technologieeinsatz: u-Test
TI-Nspire

GeoGebra: www.hpt.at

Im Menü **6: Statistik**, **7: Statistische Tests**, **1: z-Test** erfolgt die komplette Auswertung des Tests. Sollen alle Stichprobenwerte eingegeben werden, so wählt man **Daten**, ist $\bar{x}$ bereits bekannt, so wählt man **Statistik**. Anschließend werden die Parameter der Berechnung eingegeben und die Art der Alternativhypothese gewählt. Man erhält die Prüfgröße und den P-Wert.

Standardabweichung σ unbekannt – t-Test

Ist die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit nicht bekannt, so entspricht der Test der Ermittlung des Vertrauensbereichs für μ bei unbekanntem σ. Man arbeitet mit der **t-Verteilung**. Für die Prüfgröße gilt daher:

$$t_{prüf} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$|t_{prüf}| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $|t_{prüf}| \leq t_{1-\alpha}$ $\Rightarrow$ H_0 annehmen, H_A verwerfen

$|t_{prüf}| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $|t_{prüf}| > t_{1-\alpha}$ $\Rightarrow$ H_0 verwerfen, H_A annehmen

9.34 Der Inhalt von Zahnpastatuben ist annähernd normalverteilt. Der Hersteller garantiert einen Mindestinhalt von $\mu_0 = 150$ ml. Ein Händler glaubt, dass der Inhalt geringer ist und entnimmt eine Stichprobe mit folgenden Werten in ml:

151 154 149 146 152 148 143 144 147 146

Lässt sich der Verdacht des Händlers aufgrund der Stichprobe bestätigen, wenn als Signifikanzniveau 1 % gewählt wird?
Bestimme den P-Wert und erkläre dessen Bedeutung.

ABD

Lösung:

1) Hypothesen aufstellen

$H_0: \mu \geq \mu_0$

$H_A: \mu < \mu_0$

- Man ist an einer eventuellen Verkleinerung von μ interessiert, daher wird ein einseitiger Test durchgeführt.

2) Prüfgröße und kritischen Wert ermitteln

$\bar{x} = 148$; $s = 3{,}527...$, $n = 10$

$$t_{prüf} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{148 - 150}{\frac{3{,}527...}{\sqrt{10}}} = -1{,}792...$$

$\alpha = 1\,\% \Rightarrow t_{f;\,1-\alpha} = t_{9;\,0{,}99} = 2{,}821...$

- Der kritische Wert ist der Schwellenwert.

3) Entscheidung treffen

$|t_{prüf}| \leq t_{f;\,1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen

- $|\text{Prüfgröße}| \leq$ kritischer Wert $\Rightarrow H_0$ annehmen

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % lässt sich der Verdacht des Händlers nicht bestätigen.

$|t_{prüf}| = 1{,}792... = t_{9;\,1-P} \Rightarrow 1 - P = 0{,}9467...$

$P = 0{,}0532... \approx 5{,}33\,\%$

- P-Wert berechnen

Da der P-Wert > 1 % ist, bleibt H_0 aufrecht.
Er gibt jenes Signifikanzniveau an, bei dem man H_0 gerade noch verwerfen würde.

Technologieeinsatz: t-Test
TI-Nspire

TE

GeoGebra: www.hpt.at

Im Menü **6: Statistik**, **7: Statistische Tests**, **2: t-Test** können die Messwerte unter Daten als Liste eingegeben werden.

t-Test
µ0: 150
Liste: {151,154,149,14(
Häufigkeitsliste: 1
Alternative Hyp: Ha: µ < µ0

tTest 150,{151,154,149,146,152,148,143,14

"Titel"	"t–Test"
"Alternative Hyp"	"µ < µ0"
"t"	-1.79284
"PVal"	0.053295
"df"	9.
"x̄"	148.
"sx := sn-1x"	3.52767
"n"	10.

ABC **9.35** Während der Arbeitszeit in einem Chemiekonzern sind die Angestellten einer Schadstoffbelastung ausgesetzt, die im Mittel 208 ppm pro Betriebsstunde bei einer Standardabweichung von 14 ppm ausmacht und als normalverteilt angesehen werden kann. Eine aufgrund von Atembeschwerden durchgeführte Erhebung ergab bei 16 Tests den Mittelwert $\bar{x} = 214$ ppm. Kann dies die Befürchtung auf Anstieg der mittleren Schadstoffbelastung untermauern? Beantworte die Frage auf dem Signifikanzniveau 5 %.

ABCD **9.36** Die Firma „Staub & Co“ fertigt Staubsauger, deren Leistung als normalverteilt mit $\mu_0 = 1\,500$ W und $\sigma = 15$ W angesehen werden kann. Um zu prüfen, ob sich der Erwartungswert während einer Produktionsphase verändert hat, wurde eine Stichprobe von 30 neuen Staubsaugern entnommen, bei der sich folgende mittlere Leistung ergab: $\bar{x} = 1\,511$ W

1) Teste auf einem Signifikanzniveau von 5 %, ob sich der Erwartungswert geändert hat.
2) Ermittle den P-Wert und beschreibe dessen Bedeutung mit eigenen Worten.
3) Gib ohne zu rechnen an, ob die Nullhypothese bei $\alpha = 1$ % angenommen oder verworfen wird. Begründe deine Antwort.

ABC **9.37** Bei der automatischen Abfüllanlage von Vanillemilch ist die Abfüllmenge angeblich auf einen Sollwert von 500 ml eingestellt. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % soll geklärt werden, ob die Abfüllmenge darunter liegt. Dazu wird die Abfüllmenge von 20 Packungen ermittelt und der Mittelwert $\bar{x} = 498{,}9$ ml festgestellt. Die Abfüllmenge kann dabei als normalverteilt mit $\sigma = 1{,}3$ ml angenommen werden.

1) Bestätigt die vorliegende Stichprobe den Verdacht, dass die Vanillemilchpackungen zu gering befüllt wurden?
2) Beantworte die Frage aus ***1)***, wenn derselbe Mittelwert in einer Stichprobe vom Umfang 5 festgestellt wird.

CD **9.38** Die Reißfestigkeit von Paketschnüren kann als normalverteilt angesehen werden mit $\mu_0 = 40\,\frac{\text{cN}}{\text{dtex}}$ und $\sigma = 5\,\frac{\text{cN}}{\text{dtex}}$. Bei einem Test wird eine Stichprobe von 50 Schnüren genommen und ein Mittelwert von $41{,}3\,\frac{\text{cN}}{\text{dtex}}$ ermittelt. Nebenstehende Abbildung zeigt die Auswertung.

1) Gib die Fragestellung des Tests an.
2) Begründe, ob die Nullhypothese mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95 % bzw. 99 % angenommen wird.

"Titel"	"z−Test"
"Alternative Hyp"	"μ > μ0"
"z"	1.83848
"PVal"	0.032996
"x̄"	41.3
"n"	50.
"σ"	5.

ABC **9.39** Die Füllmengen von Shampooflaschen sind annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu_0 = 200$ ml. Aus einer Lieferung werden 15 Flaschen entnommen, wobei sich für die Füllmengen folgende Werte in ml ergeben:

198 208 205 195 197 199 203 202 204 196 207 205 199 193 209

1) Kann man sicher sein, dass der Sollwert nicht überschritten wird, wenn man von einem 5-%-Signifikanzniveau ausgeht?
2) Ermittle den P-Wert und interpretiere das Ergebnis.

ABC **9.40** In einer Mühle benutzt man eine Abfüllmaschine für 1-kg-Mehlpackungen mit einem Erwartungswert $\mu_0 = 1\,010$ g. Vom Amt für Lebensmittelkontrolle wird durch eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ überprüft, ob sich der Erwartungswert geändert hat. Die Stichprobe ergab einen Mittelwert von 998,5 g und eine Standardabweichung von 19,8 g. Teste auf einem Signifikanzniveau von 1 %, ob sich der Erwartungswert geändert hat.

9.3.3 Test über binomialverteilte Daten

Anhand einer Musteraufgabe wird die Durchführung eines Tests über den Parameter einer Binomialverteilung gezeigt.

9.41 In einer Zeitung wird behauptet, dass 48 % aller Jugendlichen zwischen 14 und 18 Jahren zu wenig schlafen.

ABCD

TE

1) Entwirf einen Test für eine Stichprobe vom Umfang n = 200 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %.

2) In einer Tiroler HTL schlafen von 200 befragten Jugendlichen 81 zu wenig. Argumentiere, ob man aufgrund dieses Umfrageergebnisses der Behauptung der Zeitung zustimmen wird.

3) In einer HTL in Oberösterreich schlafen 35 % aller Schülerinnen und Schüler zu wenig. Jemand, der diesen Prozentsatz nicht kennt, hält den Test aus ***1)*** in dieser HTL ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Behauptung der Zeitung Glauben geschenkt wird?

Lösung:

1) H_0: $p \geqslant 0{,}48$ … Behauptung der Zeitung, H_A: $p < 0{,}48$ … Alternativhypothese

	A	B	C
1			
2		x	G(x;200;0,48)
3		80	0,013869174
4		81	0,019790261
5		82	0,027722073
6		83	0,038131198
7		84	0,051514359
8		85	0,068373508
9		86	0,089183549
10		87	0,114354315
11		88	0,144189594

- Ermitteln des einseitig nach unten begrenzten Zufallsstreubereichs zB mit Excel: **=BINOM.VERT(B3;200;0,48;1)**
- 84 ist der kleinste Wert, für den gilt: $G(x; n, p) \geqslant 0{,}05$

Annahmebereich: 84 bis 200 Jugendliche
Ablehnungsbereich: 0 bis 83 Jugendliche

2) 81 liegt im Ablehnungsbereich. Die Behauptung der Zeitung wird also verworfen.

3) n = 200, p = 0,35

- Berechnen des Fehlers 2. Art

$P(84 \leqslant X \leqslant 200) = 0{,}0237...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Behauptung der Zeitung Glauben geschenkt wird, obwohl sie falsch ist, beträgt 2,4 %.

9.42 Die Firma „Schlemmerland" behauptet, dass ihre Konkurrenzfirma „Gourmet-Palast" die Gewichtsangabe, die auf deren Trüffelverpackungen steht, unterschreitet und damit die Kunden hinters Licht führt. „Gourmet-Palast" behauptet: „Maximal 5 % der Verpackungen haben ein zu geringes Gewicht." „Schlemmerland" untersucht 300 Packungen, von denen 24 Packungen ein zu geringes Gewicht haben. Liegt ein Betrugsversuch von „Gourmet-Palast" vor? Beantworte die Frage, indem du die Aussage mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 5 % überprüfst.

ABC

9.43 An einer steirischen HTL wurde vor vier Jahren eine Umfrage über das Leseverhalten der Schüler gemacht. 28 % der Schüler gaben an, auch in der Freizeit regelmäßig zu lesen. Der Deutschlehrer der 5AHIT möchte wissen, ob sich das Leseverhalten verändert hat und bittet die Schüler, einen statistischen Test durchzuführen (Irrtumswahrscheinlichkeit α = 0,05). Die Schüler der 5AHIT befragen 144 Schüler, von denen laut Umfrage 21 regelmäßig lesen. Wie lautet das Testergebnis?

ABC

Beurteilende Statistik

ABD **9.44** Der Direktor einer Wiener Elektronikfirma behauptet, dass mindestens 80 % der Kunden auf einer Fachmesse einen Katalog bestellen.

1) Der Chefanalytiker wird beauftragt, einen Test zu entwerfen, der diese Hypothese an einer Stichprobe von 300 Kunden mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % überprüft.
Ermittle den Annahme- und den Ablehnungsbereich und beschreibe deren Bedeutung.

2) Obwohl die Projektmanagerin aus Erfahrung weiß, dass nur 70 % der Kunden einen Katalog bestellen, wird die Untersuchung aus ***1)*** auf Anweisung des Direktors durchgeführt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobe die falsche Annahme des Direktors zu bestätigen scheint. Erkläre, welche Art von Fehler in diesem Fall begangen wird.

ABCD **9.45** In einem Bericht über Zirkusakrobaten wird behauptet, dass 20 % der Akrobaten täglich mehr als sieben Stunden trainieren müssen. Eine Sportwissenschaftlerin entwirft einen Test für eine Stichprobe von 70 Akrobaten mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 %.

1) Im „Cirque Magique" trifft die obige Behauptung auf 13 % der Akrobaten zu. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach Abhaltung des entworfenen Tests die 20-%-Hypothese irrtümlich anzunehmen? Erkläre, um welche Art von Fehler es sich hier handelt.

2) Beim internationalen Zirkusfestival wird die Behauptung an 70 Clowns getestet. Welchen Einwand solltest du bei der Präsentation des Ergebnisses erheben?

ABC **9.46** In einem Bericht wird behauptet, dass 16 % der Studierenden regelmäßig bei Schularbeiten schummeln. Viele Studierende einer HTL im Burgenland glauben, dass dieser Wert zu niedrig sei und führen eine Umfrage bei 130 Studierenden durch.

1) Wie lautet das Testergebnis, wenn 28 der befragten Studierenden regelmäßig schummeln und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}01$ getestet wird?

2) Ein Austauschschüler aus Kanada, wo Schummeln verpönt ist und im Schnitt nur 5 % der Studierenden schummeln, führt den Test in seiner Heimat durch. Ist das sinnvoll? Kann man hier einen Fehler 2. Art begehen?

ABC **9.47** Eine Schulärztin behauptet, dass 70 % der Schülerinnen und Schüler eine zu schwere Schultasche haben. Ein Test mit 250 Schülerinnen und Schülern hat ergeben, dass 158 eine zu schwere Schultasche haben. Überprüfe die Behauptung der Schulärztin mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05.

ABCD **9.48** In einer Aussendung wird behauptet, dass nur 8 % der Schülerinnen und Schüler an höheren Schulen regelmäßig Sport betreiben. Während manche diesen Wert für zu niedrig halten, behaupten andere, er sei noch zu hoch gegriffen. Entwirf einen Test mit 400 befragten Schülerinnen und Schülern und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %.
Gib den Annahmebereich an und erkläre dessen Bedeutung. Arbeite mit der Normalverteilung als Näherung.

9.3.4 Zweistichprobentests – F-Test und t-Test

Häufig werden der Erwartungswert und die Standardabweichung zweier Produktionsserien verglichen. Falls μ und σ nicht bekannt sind, kann man ermitteln, ob sich diese Werte während des Produktionsprozesses verändert haben.

Man geht von zwei unabhängigen Stichproben vom Umfang n_1 und n_2 mit den Mittelwerten $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ und den Standardabweichungen s_1 und s_2 aus. Sind die Merkmale normalverteilt, so können für den Vergleich zwei Tests verwendet werden.

- Der **Zweistichproben-F-Test** gibt an, ob sich die Varianzen zweier Stichproben signifikant voneinander unterscheiden. Bei diesem Test wird die so genannte **F-Verteilung** oder **Fisher-Verteilung** (Ronald Aylmer Fisher, englischer Statistiker, 1890 – 1962) verwendet.
- Beim **Zweistichproben-t-Test** (bei unabhängigen Stichproben) wird festgestellt, ob sich die Mittelwerte zweier Stichproben signifikant voneinander unterscheiden.

Fisher-Verteilung

Um die Varianzen s_1^2 und s_2^2 zu vergleichen, wird deren Verhältnis $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ gebildet. Das Verhältnis zweier Zufallsgrößen, die χ^2-verteilt sind, ist F-verteilt. Die Dichtefunktion der F-Verteilung wird mithilfe der Gammafunktion beschrieben. Sie hängt von zwei Parametern f_1 und f_2, den Freiheitsgraden, ab. Für den Freiheitsgrad des Zählers gilt $f_1 = n_1 - 1$ und für den Freiheitsgrad des Nenners gilt $f_2 = n_2 - 1$.

Dichtefunktion für $f_1 = 9$ und $f_2 = 5$

Zweistichproben-F-Test

Wie bei den Einstichprobentests wird auch hier je nach Fragestellung zwischen ein- und zweiseitigem Test unterschieden und die entsprechenden Hypothesen aufgestellt.

Die Prüfgröße $F_{prüf} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ mit $s_2 < s_1$ wird mit dem kritischen Wert $F_{f_1, f_2; 1-\alpha}$ bzw. $F_{f_1, f_2; 1-\frac{\alpha}{2}}$ verglichen.

9.49 Bei der Abfüllung von Nougatcreme in 400-g-Gläser werden parallel zwei Maschinen verwendet. Eine Stichprobe von 10 Gläsern bei Maschine 1 ergab eine Standardabweichung von $s_1 = 3{,}6$ g und eine von 15 Gläsern bei Maschine 2 ergab $s_2 = 4{,}2$ g. Prüfe auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5$ %, ob sich die Varianzen unterscheiden.

ABC

TI-Nspire, Excel: www.hpt.at

Lösung:

1) Hypothesen aufstellen
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Zweiseitiger Test, da nach dem Unterschied gefragt wird.

2) Prüfgröße und kritischen Wert ermitteln
$F_{prüf} = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{4{,}2^2}{3{,}6^2} = 1{,}361...$
$F_{14,9;\,0{,}975} = 3{,}797...$

- Ermittlung des kritischen Werts, zB mit GeoGebra:

Eingabe: InversFVerteilung[14, 9, 0.975]

3) Entscheidung treffen
$F_{prüf} \leq F_{f_2, f_1; 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen

Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Maschinen mit unterschiedlichen Varianzen arbeiten, ist kleiner als 1 %.

Zweistichproben-t-Test

Um zu überprüfen, ob zwei normalverteilte Grundgesamtheiten mit gleicher Varianz $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ den gleichen Erwartungswert haben, kann der Zweistichproben-t-Test verwendet werden. Es wird jeweils eine Stichprobe vom gleichen Umfang n entnommen.
Als Prüfgröße $t_{prüf}$ wird die Differenz der Mittelwerte $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ verwendet, deren Standardabweichung mit $s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot (s_1^2 + s_2^2)}$ geschätzt wird: $t_{prüf} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot (s_2^1 + s_2^2)}}$

Da die Standardabweichungen zusammengefasst werden, wird eine gewichtete Varianz, die gepoolte Varianz, verwendet. Die Prüfgröße ist t-verteilt mit dem Freiheitsgrad f = 2n – 2.

ABC TE

TI-Nspire, Excel: www.hpt.at

9.50 Bei der Abfüllung von Nougatcreme in 400-g-Gläser werden parallel zwei Maschinen verwendet. Eine Stichprobe von 10 Gläsern ergab bei Maschine 1 einen Mittelwert $\bar{x}_1 = 401{,}8$ g und eine Standardabweichung von $s_1 = 3{,}22$ g und bei Maschine 2 $\bar{x}_2 = 399{,}5$ g und $s_2 = 3{,}66$ g. Gemäß **9.49** werden σ_1 und σ_2 als gleich angenommen.
Prüfe auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$, ob beide Maschinen gleich viel abfüllen.

Lösung:

1) Hypothesen aufstellen
$H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

- Zweiseitiger Test, da nach der Gleichheit gefragt wird.

2) Prüfgröße und kritischen Wert ermitteln

$$t_{prüf} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot (s_1^2 + s_2^2)}} = \frac{401{,}8 - 399{,}5}{\sqrt{\frac{1}{10} \cdot (3{,}22^2 + 3{,}66^2)}} = 1{,}491...$$

$t_{18;\,0{,}975} = 2{,}100...$

- $t_{Prüf}$ berechnen
- $f = 2 \cdot 10 - 2 = 18$
- Ermittlung des kritischen Werts zB mit GeoGebra:

Eingabe: **InverstVerteilung[18, 0.975]**

3) Entscheidung treffen
$|t_{prüf}| \leq t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen

Bei $\alpha = 5\,\%$ kann von gleichen Abfüllmengen ausgegangen werden.

Bemerkung: Viele Technologien bieten Befehle für vollständige Testauswertungen an. Meist wird bei den Berechnungen auch der P-Wert ausgegeben.

ABC TE

9.51 Bei einer Schneidemaschine wird eine Wartung durchgeführt. Vor und nach der Wartung wird eine Stichprobe von je 10 Stück entnommen (Angaben im mm).
Vorher: 81 82 79 80 77 78 81 79 78 81
Nachher: 76 77 82 83 80 79 78 81 79 80
Die Längen können als normalverteilt angesehen werden. Prüfe auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\,\%$, ob sich die Varianzen unterscheiden.

ABCD TE

9.52 In einem Betonwerk wird an zwei Maschinen Beton gemischt. Es soll anhand zweier Stichproben von je 8 Betonwürfeln geprüft werden, ob die Druckfestigkeit gleich ist.
Maschine 1: $\bar{x}_1 = 40{,}2\ \frac{N}{mm^2}$, $s_1 = 0{,}8\ \frac{N}{mm^2}$ Maschine 2: $\bar{x}_2 = 41{,}2\ \frac{N}{mm^2}$, $s_2 = 1{,}0\ \frac{N}{mm^2}$

1) Erkläre, unter welchen Voraussetzungen ein Zweistichproben-t-Test durchgeführt werden kann.
2) Nimm an, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind. Prüfe auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\,\%$, ob die Druckfestigkeiten gleich sind.
3) Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Auswertung mit Technologieeinsatz. Welche Aussage kann man für $\alpha = 5\,\%$ treffen?

T Test, Differenz der Mittelwerte

	Stichprobe 1	Stichprobe 2
Mittelwert	40.2	41.2
s	0.8	1
N	8	8
SE	0.4528	
Freiheitsgrade	14	
t	-2.2086	
P	0.0444	

9.4 Regression und Korrelation

Datenmaterial liegt oft in Form von Wertepaaren vor. Das Ermitteln einer mathematischen Funktion von vorgegebenem Typ, die diese Daten möglichst gut beschreibt, wird als **Regression** bezeichnet. Die „Stärke" des Zusammenhangs zwischen den beiden Größen wird mithilfe der **Korrelation** beschrieben.

9.4.1 Methode der kleinsten Quadrate, Ausgleichsfunktionen

9.53 Der amerikanische Astronom Edward Powell Hubble (1889 – 1953) lieferte (ungewollt) einen wesentlichen Beitrag zu der Theorie, dass das Weltall expandiert. Er beobachtete mehrere hundert Galaxien mithilfe eines Spiegelteleskops. Dabei wurde sowohl die Entfernung r einer Galaxie von der Erde als auch deren Geschwindigkeit v anhand der Rotverschiebung gemessen. Das folgende Diagramm zeigt einige dieser Messwerte.

ABC

1) Lege eine Gerade so durch die Messpunkte, dass sie die Messdaten möglichst gut wiedergibt.
2) Lies die Gleichung dieser Geraden aus der Grafik ab.
3) Vergleiche die Steigung der Geraden mit der Hubble-Konstanten $H_0 \approx (74{,}3 \pm 2{,}1)\,\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ (pc … Parsec, 1 pc $\approx 3 \cdot 10^{16}$ m). Was fällt dir auf?

Liegt nach Messungen Datenmaterial in Form von Wertepaaren vor, so lassen sich diese Wertepaare als Punkte in ein Koordinatensystem eintragen. Man nennt diese Darstellung ein **Punktwolken-Diagramm**. Häufig stellt sich die Frage, ob sich diese Punktwolken durch mathematische Funktionsgleichungen annähernd beschreiben lassen.

Mithilfe der **Ausgleichsrechnung** soll nun eine Kurve y = f(x) bestimmt werden, die sich den erhobenen Datenpunkten am besten anpasst. Im Unterschied zur Interpolation wird der Funktionstyp unabhängig von der Anzahl der Datenpunkte vorgegeben und die Kurve geht im Allgemeinen **nicht** durch die Datenpunkte.
Anhand dieser so genannten **Regressionskurve** (**Ausgleichskurve**) (latein: „regredior" = zurückgehen) lässt sich zu einem vorgegebenen Wert x auch der zugehörige Wert y abschätzen. Liegt der Wert x außerhalb des gegebenen Bereichs, so wird die Berechnung von y auch als **Extrapolation** bezeichnet.

Lineare Ausgleichsfunktion (Regressionsgerade)

Aus einer Versuchsreihe erhält man von zwei Größen x und y die Messdaten $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$, …, $P_n(x_n|y_n)$. Die „einfachste" Kurve, die durch diese Punkte gelegt werden kann, ist eine Gerade. Es soll nun jene Geradengleichung $\hat{y} = a \cdot x + b$ ermittelt werden, die den Zusammenhang so gut wie möglich beschreibt.

Meist wird zur Ermittlung der gesuchten Geraden die **Methode der kleinsten Quadrate** verwendet. Dabei wird für jeden Punkt P_i die Differenz zwischen dem gemessenen Wert y_i und dem mithilfe der (noch nicht bekannten) linearen Funktion ermittelten Schätzwert $\hat{y}_i$ gebildet: $(\hat{y}_i - y_i)$

Die Koeffizienten a und b der gesuchten Geraden werden nun so ermittelt, dass die Summe der quadrierten Differenzen $(\hat{y}_i - y_i)^2$ minimal wird: $\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad \rightarrow \text{minimal}$

Ist die Gleichung dieser Geraden bereits bekannt, kann man aus den vorhandenen x-Werten die zugehörigen $\hat{y}$-Werte wie folgt berechnen: $\hat{y}_i = a \cdot x_i + b$

Damit ergibt sich für die Summe der quadrierten Differenzen: $\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(a \cdot x_i + b) - y_i]^2$

Bei der Summe der Abweichungsquadrate handelt es sich um eine Funktion, die von zwei Variablen abhängt: $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b - y_i)^2$

Um das Minimum zu ermitteln, müssen daher die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial a}$ und $\frac{\partial f}{\partial b}$ gebildet und gleich null gesetzt werden.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) \cdot x_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2 \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 2 \cdot \left(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = 0$$

Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit den Unbekannten a und b.

$$\text{I:} \quad a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$\text{II:} \quad a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Aus Gleichung II erhält man: $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$ $\qquad \bar{x}, \bar{y}$ … arithmetische Mittel

Setzt man b in Gleichung I ein und löst nach a auf, ergibt sich: $a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

Mit $n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ erhält man: $a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

Liegen n Messdaten in der Form $P_1(x_1|y_1), P_2(x_2|y_2), \ldots, P_n(x_n|y_n)$ vor, erhält man die Koeffizienten a und b der **Regressionsgeraden $\hat{y} = a \cdot x + b$** wie folgt:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} \qquad \bar{x}, \bar{y} \text{ … arithmetische Mittel}$$

Bemerkungen:

- Anhand der Formel für den Koeffizienten b erkennt man, dass der Punkt $(\bar{x}|\bar{y})$ auf der Geraden $\hat{y} = a \cdot x + b$ liegt.
- Wie gut eine lineare Funktion den untersuchten Zusammenhang beschreibt, kann mithilfe der Korrelation entschieden werden (siehe Abschnitt 9.4.2).
- Üblicherweise werden heutzutage die Koeffizienten der Regressionsgeraden mithilfe von Technologieeinsatz berechnet.

9.54 Gegeben sind fünf Messpunkte P(1|2), Q(2|2), R(4|3), S(5|4) und T(7|4). Ermittle die Gleichung einer linearen Ausgleichsgeraden für diese Messwerte und stelle die Messpunkte und die Gerade grafisch dar.

B

Lösung:

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+5+7}{5} = 3{,}8; \quad \bar{y} = \frac{2+2+3+4+4}{5} = 3$$

$$a = \frac{(1-3{,}8)(2-3) + (2-3{,}8)(2-3) + (4-3{,}8)(3-3) + (5-3{,}8)(4-3) + (7-3{,}8)(4-3)}{(1-3{,}8)^2 + (2-3{,}8)^2 + (4-3{,}8)^2 + (5-3{,}8)^2 + (7-3{,}8)^2} = \frac{9}{22{,}8} = \frac{15}{38}$$

$$b = 3 - \frac{15}{38} \cdot 3{,}8 = \frac{3}{2}$$

$$\hat{y} = \frac{15}{38}x + \frac{3}{2} \approx 0{,}395x + 1{,}5$$

Technologieeinsatz: Ausgleichsgerade
Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)

TI-Nspire, GeoGebra, Mathcad: www.hpt.at

ZB: Regressionsgerade zu Aufgabe **9.54**: P(1|2), Q(2|2), R(4|3), S(5|4), T(7|4)

Die x- und y-Werte werden eingegeben und die Punkte in einem Diagramm (**Punkt (XY)**) dargestellt.
Das Diagramm kann dann beliebig formatiert werden.

Um die Ausgleichsgerade bestimmen und darstellen zu lassen, klickt man mit der rechten Maustaste auf einen Datenpunkt und wählt **Trendlinie hinzufügen…** .

Als Typ wird **Linear** ausgewählt. Unter Prognose kann die Gerade „verlängert" werden, also ein Trend angegeben werden. Zusätzlich wird **Formel im Diagramm anzeigen** aktiviert.

Die Regressionsgerade wird sowohl grafisch dargestellt als auch als Gleichung angegeben.

Weitere Ausgleichsfunktionen

Nicht immer ist eine Näherung durch eine lineare Funktion sinnvoll. Daher besteht auch die Möglichkeit, verschiedene andere Potenzfunktionen (quadratische, kubische usw.) als Modellfunktion zu verwenden, sodass die Summe der Quadrate aller senkrechten Abstände zum Funktionsgraphen ein Minimum wird. Im Prinzip kann jeder Funktionstyp als Ansatz für eine Ausgleichsrechnung verwendet werden. In der Praxis wird oft auch mit Exponentialfunktionen, logarithmischen oder trigonometrischen Funktionen gearbeitet.

ABD TE **9.55** Bei einer RC-Serienschaltung wurde der Strom in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Die Ergebnisse der Messung sind in der Tabelle dargestellt.

Zeit t in s	0	2	5	10	12	20
Stromstärke i in mA	4	2,6	1,5	0,5	0,3	0,1

1) Stelle die Messdaten grafisch dar. Argumentiere, welche Regressionsfunktion hier am besten geeignet wäre.
2) Ermittle diese Regressionsfunktion.

Lösung mit Excel 2010:

1)

t	i
0	4
2	2,6
5	1,5
10	0,5
12	0,3
20	0,1

- Die Werte werden in zwei Spalten eingegeben.
- Die grafische Darstellung erfolgt mit dem Diagrammtyp **Punkt (XY)**.

Aufgrund der Lage der Punkte und der Tatsache, dass es sich um einen Stromverlauf einer Kondensatorladung handelt, wählt man eine Exponentialfunktion.

2)

- Beim Auswählen der Trendlinie wird als Regressionstyp **Exponential** gewählt.

$\hat{y} = 3{,}6817\text{ mA} \cdot e^{-0{,}189\text{ s}^{-1} \cdot t}$

B **9.56** Gegeben sind folgende Messpunkte: P(2|3), Q(4|7), R(5|8), S(6|10) und T(7|11)
Bestimme die Gleichung der Regressionsgeraden. Zeichne die Punkte und die ermittelte Gerade in ein Koordinatensystem ein.

B **9.57** **1)** Gib die Gleichung der Regressionsgeraden für die gegebenen Wertepaare an.
2) Ermittle die jeweils fehlenden Werte mithilfe der Regressionsgeraden.
a) M = {(2; 4), (3; 3), (4; 5), (6; 6), (7; 8), (8; 7), (10; 9), (12; 13)}, A(9|y), B(x|10)
b) M = {(1; 10), (3; 12), (5; 15), (6; 14), (9; 18), (11; 23), (14; 27), (15; 30)}, A(x|12), B(8|y)

9.58 Aus einer Versuchsreihe erhält man folgende Messwerte: **B**

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	?	6	4	4	2	1	0

1) Ermittle die Gleichung der Ausgleichsgeraden.
2) Bestimme den y-Wert für x = 3.

9.59 Eine Firma produziert einen Spezialstoff für Ballkleider. Die Gesamtkosten K(x) für eine tägliche Produktionsmenge x betragen: **AB**

x in m	10	30	40	70	90
K in €	1 500,00	2 000,00	3 000,00	4 000,00	5 000,00

1) Ermittle die Gleichung der angenäherten linearen Kostenfunktion.
2) Welche Kosten werden bei einer Produktionsmenge von 55 m Stoff erwartet?

9.60 Beim Testen eines Schiffsmotors wurde dessen Leistung P in Abhängigkeit von der Drehzahl n gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte: **ABC**

Drehzahl in $\frac{1}{min}$	2 400	2 800	3 100	3 800	4 200
P in kW	18,4	24,8	30,6	38,5	42,4

1) Ermittle die Ausgleichsgerade.
2) Welche Leistung kann man bei 1 200 Umdrehungen erwarten?
3) Erkläre, warum es sich beim Ermitteln des Werts aus **2)** um Extrapolation handelt.
4) Stelle die Daten und die Ausgleichsgerade in einem Diagramm dar. Ermittle daraus die Drehzahl bei einer Leistung von 35 kW.

9.61 Die Ergebnisse einer Messreihe sind in der untenstehenden Tabelle verzeichnet: **ABD**

x	1	2	3	4	6	7	8	9	10
y	7	6	4	2	1,5	?	3	4	5

1) Stelle die Messdaten grafisch dar. Argumentiere, welche Regressionsfunktion hier am besten geeignet wäre.
2) Ermittle die Regressionsfunktion.
3) Berechne den Funktionswert für x = 7.
4) Erkläre anhand der Aufgabe das Prinzip der „Methode der kleinsten Quadrate".

9.62 Ein Unternehmen möchte Designer-Kugelschreiber herstellen. Bei einer Produktion von 100 Stück fallen Kosten von 3 500,00 € an, bei 250 Stück 7 200,00 €, bei 320 Stück 8 100,00 € und bei 400 Stück 9 000,00 €. Bestimme die Gleichung der Ausgleichsfunktion für die Kosten, wenn diese **ABD**
1) linear,
2) quadratisch,
3) kubisch ist.
Argumentiere, welches Modell den Kostenverlauf am besten beschreibt.

9.4.2 Lineare Korrelation und lineare Regression

ABD **9.63** Haben große Eltern große Kinder? Sammle die Daten der Körpergröße der Eltern und deren Kinder für deine Klasse. Lässt sich ein Zusammenhang erkennen?

In der Medizin möchte man zum Beispiel den Zusammenhang zwischen den Lebensgewohnheiten und dem gesundheitlichen Befinden erforschen. Dazu gehören Fragen wie „Leben verheiratete Menschen länger?“
Um solche Fragen beantworten zu können, muss man zwei Merkmale vergleichen.

Die **Korrelation** (latein: „relatio“ = Beziehung) beschreibt die Beziehung zwischen zwei oder mehreren Größen. Allerdings lassen sich aus der Korrelation keine Schlüsse ziehen, ob eine der Größen die andere kausal beeinflusst, das heißt, ob sie diese Größe bzw. ihre Ausprägung verursacht. So lässt sich zum Beispiel das gemeinsame Auftreten von Störchen und Geburten rechnerisch zeigen, ohne dass man daraus einen kausalen Zusammenhang ableiten könnte.
Stellt man den Zusammenhang zwischen zwei Größen in einem Punktwolken-Diagramm dar, so liegen bei linearer Korrelation diese Punkte annähernd auf einer Geraden.

Das nebenstehende Diagramm gibt den diastolischen und den systolischen Wert des Blutdrucks verschiedener Personen wieder. Es zeigt, dass ein hoher Wert der einen Größe häufig gleichzeitig mit einem hohen Wert der zweiten Größe gemessen wurde. Kennt man nur einen der beiden Werte, so liegt der zweite Wert vermutlich in einem eingeschränkten Bereich. Die durchgezogene Linie symbolisiert diese Beziehung.

Ein solcher Zusammenhang muss nicht immer gegeben sein.
Die Untersuchung der nebenstehenden Grafik befasst sich mit der Abhängigkeit der Beweglichkeit der Schulter von der Struktur des Schlüsselbeins. Die Punkte sind regellos verteilt, eine Korrelation zwischen Schlüsselbeinwinkel und Bewegungswinkel lässt sich anhand dieser Grafik nicht erkennen.

Wird ein linearer Zusammenhang vermutet und eine Regressionsgerade ermittelt, so gibt die Korrelation darüber Auskunft, wie gut sich diese lineare Näherung eignet.

Karl Pearson (britischer Mathematiker, 1857 – 1936) entwickelte eine Maßzahl, den **Pearson’schen Korrelationskoeffizienten**, dessen Wert r ein Schätzwert für die Ausprägung und Richtung eines **linearen Zusammenhangs** zwischen zwei Messgrößen darstellt.

Pearson’scher Korrelationskoeffizient (Empirischer Korrelationskoeffizient)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

x_i, y_i ... Koordinaten von i Messpunkten
$\bar{x}$, $\bar{y}$ ... arithmetische Mittel

Der lineare Zusammenhang ist umso besser, je näher $|r|$ bei 1 liegt.

- $|r| = 1$ ... Alle Punkte liegen auf einer Geraden, dies stellt den maximalen Zusammenhang dar.
- $r = 0$ ... Die Punkte liegen verstreut, es gibt keinen linearen Zusammenhang.
- $0 < |r| < 1$ ... Je näher der Wert von $|r|$ bei 1 liegt, desto größer ist der lineare Zusammenhang.

maximaler Zusammenhang | mäßiger Zusammenhang | großer Zusammenhang | kein Zusammenhang

Das Vorzeichen von r gibt die Richtung der Geraden an, für $r < 0$ ist sie fallend, für $r > 0$ ist sie steigend.

Bei der Interpretation von Korrelationskoeffizienten ist zu beachten, dass eine einheitliche Aussage über die Stärke des Zusammenhangs nicht definiert ist. So wird zum Beispiel im Bereich der Medizin oder Pharmazie ein Korrelationskoeffizient von 0,3 mitunter schon als sehr hoch gewertet, während in den Wirtschaftswissenschaften von hoher Korrelation meist erst ab 0,9 gesprochen wird.

9.64 In einer Gesundheitsbefragung wurden fünf Personen verschiedenen Alters nach ihrem „subjektiven Gesundheitszustand" befragt. Die Antworten variieren dabei von 1,0 (sehr gut) bis 5,0 (sehr schlecht). Berechne und interpretiere den Korrelationskoeffizienten. Ermittle die Regressionsgerade und stelle sie grafisch dar.

BC

Alter in Jahren	22	37	45	48	62
Gesundheitszustand	1,2	1,0	1,8	2,7	3,4

Lösung:

$\bar{x} = \frac{214}{5} = 42,8$ und $\bar{y} = \frac{10,1}{5} = 2,02$

Zur Vereinfachung der Berechnungen wird eine Tabelle angelegt.

	Alter	**Gesundheitszustand**	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
	22	1,2	−20,8	432,64	−0,82	0,6724	17,056
	37	1,0	−5,8	33,64	−1,02	1,0404	5,916
	45	1,8	2,2	4,84	−0,22	0,0484	−0,484
	48	2,7	5,2	27,04	0,68	0,4624	3,536
	62	3,4	19,2	368,64	1,38	1,9044	26,496
Σ	214	10,1		866,80		4,1280	52,520

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 42,8) \cdot (y_i - 2,02) = 52,52$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{866,8 \cdot 4,128} = 59,817...$$

$$r = \frac{52,52}{59,817...} = 0,8780... \Rightarrow r \approx 0,878$$

$$a = \frac{52,52}{866,8} = 0,060...$$

$$b = 2,02 - a \cdot 42,8 = -0,573...$$

$$\hat{y} = 0,06 \cdot x - 0,57$$

Gesundheitszustand, Alter; y-Achse: 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5; x-Achse: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65

Da der Wert von r nahe bei 1 liegt und positiv ist, handelt es sich um eine hohe positive Korrelation. Da der Wert jedoch auf einer Befragung von nur fünf Personen beruht, sind Verallgemeinerungen wie „Je älter die Person ist, desto schlechter ist ihr subjektiver Gesundheitszustand." nicht zulässig.

Beurteilende Statistik

Ein weiterer Wert, der bei Berechnung der Regressionsgeraden von Bedeutung ist, ist das **Bestimmtheitsmaß** r^2. Mithilfe des Bestimmtheitsmaßes kann eine Aussage über die Streuung der tatsächlichen Werte zu jenen der ermittelten Regressionsgeraden getroffen werden. Es gibt an, welcher Anteil der Unterschiede der y-Werte sich durch die Regression erklären lässt. Zum Beispiel bedeutet $r^2 = 0{,}8$, dass 80 % der Streuung der y-Werte durch die lineare Regression erklärt sind.

TE

Technologieeinsatz: Korrelation
Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)

	A	B	C
1	x	y	
2	22	1,2	
3	37	1,0	
4	45	1,8	
5	48	2,7	
6	62	3,4	
7	Korrelationskoeffizient:		0,878
8	Bestimmtheitsmaß:		0,771

Die Berechnung des Korrelationskoeffizienten und des Bestimmtheitsmaßes einer Datenreihe erfolgt mit folgenden Befehlen:
=KORREL(Matrix1;Matrix2)
=BESTIMMTHEITSMASS(Y_Werte;X_Werte)

B **9.65** Berechne den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare
M = {(2; 4), (3; 3), (4; 5), (6; 6)} ohne Verwendung von Technologieeinsatz.

BCD **9.66** Bei einer Messung M wurden unterschiedliche Datenpaare erfasst.
1) Stelle die Datenmenge M grafisch dar.
2) Wie gut korrelieren die Daten? Begründe deine Antwort.
3) Überprüfe deine Vermutung durch Berechnung des Korrelationskoeffizienten.
a) M = {(2; 4), (3; 3), (4; 5), (6; 6), (7; 8), (8; 7), (10; 9), (12; 13)}
b) M = {(1; 10), (2; 9), (3; 12), (5; 15), (6; 14), (7; 15), (9; 18), (11; 23), (14; 27), (15; 30)}

BC **9.67** Folgende Tabelle stellt den subjektiven Gesundheitszustand von Personen im Alter von 15 oder mehr Jahren dar (Angaben in Prozent). Berechne jeweils den Korrelationskoeffizienten und interpretiere das Ergebnis.

Männer	15 bis unter 30	30 bis unter 45	45 bis unter 60	60 bis unter 75
a) Sehr gut	67,8	47,2	28,3	14,1
b) Gut	27,7	41,4	41,7	44,3
c) Mittelmäßig	3,7	9,5	22,1	32,1

Quelle: Statistik Austria

BC **9.68** Folgende Tabelle zeigt die höchste abgeschlossene Ausbildung der Bevölkerung im Alter von 25 bis 64 Jahren. Berechne den Korrelationskoeffizienten für den Zusammenhang Jahr – abgeschlossene Ausbildung bei ***1)*** Männern, ***2)*** Frauen und ***3)*** Männer und Frauen und interpretiere jeweils das Ergebnis.

Männer	**1971**	**1981**	**1991**	**2001**	**2011**
Pflichtschule	724 457	600 848	521 532	430 579	343 978
Höhere Schule	122 757	148 162	213 438	271 477	335 547
Universität	74 092	99 616	141 420	197 777	291 373
Frauen	**1971**	**1981**	**1991**	**2001**	**2011**
Pflichtschule	1 333 671	1 070 118	886 140	743 006	552 892
Höhere Schule	90 759	115 916	174 488	245 138	347 193
Universität	24 332	41 872	75 929	139 599	263 159

Quelle: Statistik Austria

9.69 Arbeite mit den Daten aus **9.68**: BC
Ermittle die Regressionsgerade und beantworte folgende Fragen.
1) Wie viele Personen hatten (theoretisch) 1995 einen Universitätsabschluss?
2) In welchem Jahr würde es theoretisch gleich viele Frauen und Männer mit einem Maturaabschluss als höchsten Abschluss geben?
Vergleiche deine Ergebnisse mit den Werten aus **9.68**.

9.70 Bei einer Verdünnungsreihe wurden folgende Extinktionen E (Absorption des Lichts bei bestimmten Wellenlängen) bei einer Wellenlänge von 440 nm gemessen: ABC

$c_{Lösung}$ in $\frac{mol}{L}$	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
E	0,60	0,32	0,18	0,08	0,04

1) Ermittle die Gleichung der Regressionsgeraden.
2) Bestimme den Korrelationskoeffizienten und interpretiere diesen.
3) Stelle das Punktwolken-Diagramm und die Regressionsgerade grafisch dar.
4) Bestimme die Konzentration einer Lösung mit E = 0,25, wenn der Zusammenhang zwischen Extinktion und Konzentration als linear angenommen wird.

9.71 Der Betriebsmanager eines Unternehmens, das Radios in Form von Computermäusen produziert, hat folgende anfallende Gesamtkosten bei der Produktion festgestellt: ABCD

Anzahl der Radios	100	200	300	400	500
Kosten in €	3 450,00	5 210,00	7 400,00	9 180,00	10 940,00

1) Um die lineare Kostenfunktion zu nähern, wird die Methode der kleinsten Quadrate verwendet. Beschreibe diese Methode.
2) Ermittle die Ausgleichsgerade und den Korrelationskoeffizienten.
3) Wie hoch sind gemäß dieser Kostenfunktion die Gesamtkosten bei einer Produktion von 600 Radios?
4) Bei der Ermittlung einer anderen Kostenfunktion erhält man den Korrelationskoeffizienten r = –1,3. Erkläre, warum dieses Ergebnis nicht stimmen kann.

9.72 Es soll geklärt werden, ob es einen linearen Zusammenhang zwischen der Körpergröße von Männern und deren Schuhgröße gibt. Dazu wurden 10 Männer befragt und folgende Angaben gemacht: ABC

Körpergröße in cm	180	175	182	188	181	177	193	184	188	181
Schuhgröße	42	41	44	45	43	41	47	43	45	42

1) Stelle die Schuhgröße in Abhängigkeit von der Körpergröße grafisch dar.
2) Bestimme die Regressionsgerade.
3) Ermittle den Korrelationskoeffizienten und interpretiere diesen.
4) Nimm an, dass ein linearer Zusammenhang besteht. Gib an, welche Schuhgröße ein 179 cm großer Mann hat.
5) Ermittle die Regressionsgrade, wenn die Körpergröße von der Schuhgröße abhängt. Stelle diese Gerade und jene aus **2)** im selben Diagramm dar und beschreibe, was dir auffällt.

9.5 Anwendung im Qualitätsmanagement

Ein wichtiges Anwendungsgebiet für statistische Methoden ist das Qualitätsmanagement. Es befasst sich mit Methoden und Maßnahmen zur Sicherung bzw. Verbesserung der Qualität von Produktionen oder Dienstleistungen.

9.5.1 Annahmestichprobenprüfung

Um eine Produktion zu prüfen, könnte **jede** Einheit eines Loses (einer Lieferung) überprüft werden. Eine solche Prüfung nennt man **100-%-Prüfung**. Die 100-%-Prüfung kann allerdings nur bei **zerstörungsfreien** Prüfungen angewendet werden.
Aus wirtschaftlichen bzw. technologischen Gründen ist man im Allgemeinen gezwungen, die Qualität von Losen durch eine **Annahmestichprobenprüfung** zu beurteilen. Es wird dabei nur eine Teilmenge des Loses, also eine Stichprobe, geprüft. Man nimmt dabei in Kauf, dass ein Anteil von fehlerhaften Einheiten durch diese Prüfung schlüpft, kennt jedoch ungefähr das Risiko. ZB: Es werden Schrauben geliefert, wobei der Lieferumfang N = 1 000 ist. Um die Qualität zu überprüfen, wird eine Stichprobe vom Umfang n = 50 entnommen. Zwischen dem Lieferanten und dem Kunden wird eine Vereinbarung getroffen, wie viele fehlerhafte Stücke höchstens in dieser Stichprobe sein dürfen. Man einigt sich darauf, dass die Lieferung angenommen wird, wenn die Anzahl x der fehlerhaften Einheiten **höchstens 1** ist.
Die Vereinbarung, n = 50 Stück zu prüfen und bis zu c = 1 schlechte Stücke zu akzeptieren, nennt man die **Stichprobenanweisung n – c**, also hier 50 – 1 [sprich: „fünfzig eins"].
Nun wird ermittelt, bei welchem tatsächlichen Schlechtanteil p die Lieferung mit welcher Wahrscheinlichkeit angenommen wird.
Die Annahmewahrscheinlichkeit kann durch die Funktion P_{AN} beschrieben werden:

$$P_{AN}(p) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \text{ ... Verteilungsfunktion der Binomialverteilung}$$

p Anteil fehlerhafter Einheiten	P_{AN} Annahme-wahrscheinlichkeit
0,005	0,9739
0,01	0,9106
0,02	0,7358
0,03	0,5553
0,06	0,1900
0,08	0,0827
0,1	0,0338

Die Funktion $P_{AN}(p)$ nennt man **Operations-Charakteristik (OC)** bzw. **Annahmekennlinie** der Stichprobenanweisung. Die OC gibt Auskunft über die Annahmewahrscheinlichkeit P_{AN}, wenn der Fehleranteil im Los gleich p wäre. Bei einem Anteil von zum Beispiel 10 % fehlerhaften Schrauben ist die Annahmewahrscheinlichkeit der Lieferung 3,38 %. Da die Losqualität im Allgemeinen nicht bekannt ist, ist die OC eine so genannte „Was-wäre-wenn"-Kurve. Je nach Größe der Annahmewahrscheinlichkeit P_{AN} unterscheidet man drei Bereiche der OC:

① **Bereich hoher Annahmewahrscheinlichkeit:**
Der Lieferant ist bestrebt, Lose zu liefern, die bei der Stichprobenprüfung mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen werden, deren Fehleranteil p also im Bereich mit hoher Annahmewahrscheinlichkeit liegt.
$P_{AN} = 1 - \alpha = 90\,\%$ ... Annahmewahrscheinlichkeit am rechten Rand des Bereichs ①.
Wenn $0 \leq p \leq p_{1-\alpha}$ gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungerechtfertigte Rückweisung höchstens gleich α. Man bezeichnet α daher als **Lieferantenrisiko**.

② **Bereich kleiner Annahmewahrscheinlichkeit:**
Der Abnehmer ist interessiert, Lose ab einem bestimmten, aus seiner Sicht zu großen Fehleranteil p nur mit geringer Wahrscheinlichkeit anzunehmen.
$P_{AN} = \beta = 10\,\%$ entspricht in voriger Darstellung der Annahmewahrscheinlichkeit am linken Rand des Bereichs ②. Wenn $p \geqslant p_\beta$ gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine unerwünschte Losannahme höchstens β. Man bezeichnet β als **Abnehmerrisiko** oder **Kundenrisiko**.

③ **Bereich mittlerer Annahmewahrscheinlichkeit:**
In diesem Bereich sind Annahme bzw. Ablehnung des Loses stark vom Zufall abhängig. $p_{1-\alpha} < p < p_\beta$
Je höher der Stichprobenumfang n ist, desto kürzer ist dieser Bereich; die OC wird steiler.
Bei der 100-%-Prüfung entfällt der Bereich der mittleren Annahmewahrscheinlichkeit ③ (siehe Abbildung).

Durchschlupf
Wenn man in einem Los vom Umfang N eine Stichprobe vom Umfang n prüft, bleiben (N – n) Stück ungeprüft. Jedes dieser Stücke ist mit einer Wahrscheinlichkeit von p defekt. Die Anzahl der defekten Stücke im ungeprüften Los beträgt daher im Mittel $(N - n) \cdot p$ Stück. Der Anteil der defekten Stücke im ungeprüften Los ist daher $\frac{N-n}{N} \cdot p$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches ungeprüftes Stück defekt ist, aber trotzdem angenommen wird, beträgt:
$$D = \frac{N-n}{N} \cdot p \cdot P_{AN} = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \cdot p \cdot P_{AN} \approx p \cdot P_{AN} \quad (\text{für } n << N)$$

D wird als **Durchschlupf** (AOQ ... Average Outgoing Quality) bezeichnet und gibt den **Restfehleranteil**, der im Mittel bei vielen Losen mit dem gleichen Fehleranteil p unentdeckt bleibt, an. Oft interessiert man sich dafür, bei welchem Schlechtanteil der Durchschlupf maximal ist. Die zu D_{max} (AOQL) gehörige Qualitätslage ist der P_{AOQL} (AOQL ... Average Outgoing Quality Limit). Dieser wird aber selten wirksam, da die zugehörige Annahmewahrscheinlichkeit bei ca. 50 % liegt.

ZB:

Für die Stichprobenanweisung 50 – 1 gilt:
$P_{AN} = G(1; 50, p)$
$D = p \cdot P_{AN}$
$P_{AOQL} = 0{,}032;\quad D_{max} = 0{,}017$

9.73 Eine Stichprobenprüfung wird nach der Anweisung 80 – 2 durchgeführt. ABC
1) Berechne die Annahmewahrscheinlichkeit für einen Schlechtanteil von 1 %, 3 % und 4 %.
2) Stelle die OC grafisch dar und interpretiere den Kurvenverlauf.
3) Ermittle, bei welchem Fehleranteil der Durchschlupf maximal ist. Gib den AOQL an.

9.74 Ein Lieferant liefert täglich 10 000 Schrauben. Der Abnehmer schreibt eine Stichprobe von n = 200 Schrauben vor, wovon höchstens zwei fehlerhaft sein dürfen. AB
1) Der Lieferant weiß, dass die Lieferungen ungefähr 0,5 % fehlerhafte Schrauben enthalten. Berechne die Annahmewahrscheinlichkeit für eine solche Lieferung.
2) Gelegentlich kommt es vor, dass der Anteil fehlerhafter Einheiten 1 % beträgt. Berechne das Lieferantenrisiko für eine solche Lieferung.
3) Sind bei einer Lieferung mehr als 2 % fehlerhafte Schrauben vorhanden, treten beim Abnehmer Engpässe in der Fertigung auf. Berechne das Abnehmerrisiko in diesem Fall.

9.5.2 Qualitätsregelkarten und Beurteilung von Prozessen

Eine einfache Methode zur Überwachung von Prozessen stellen **Qualitätsregelkarten** dar. Ist eine Größe annähernd normalverteilt, so kennt man die Verteilung der Stichprobenmittelwerte.

Sie sind normalverteilt mit $\mu_{\bar{x}} = \mu$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Falls der Prozess wie vorgesehen den Mittelwert μ hat, müssen die Stichprobenmittelwerte im entsprechenden Zufallsstreubereich liegen.

Die Grenzen des 95-%-Zufallsstreubereichs bezeichnet man als Warngrenzen OWG (obere Warngrenze) und UWG (untere Warngrenze). Der 99-%-Zufallsstreubereich legt die Eingriffsgrenzen OEG (obere Eingriffsgrenze) und UEG (untere Eingriffsgrenze) fest.

Grenzwerte für Qualitätsregelkarten:

$UWG = \mu - 1{,}960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ... untere Warngrenze $OWG = \mu + 1{,}960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ... obere Warngrenze

$UEG = \mu - 2{,}576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ... untere Eingriffsgrenze $OEG = \mu + 2{,}576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ... obere Eingriffsgrenze

Prozessfähigkeitsindex

Im Bereich $\mu \pm 3\sigma$ einer Normalverteilung liegen fast alle Werte. Dieser Bereich wird daher als Maß dafür verwendet, wie gut ein Prozess unter Kontrolle ist.

Man geht davon aus, dass bei einem so genannten fähigen Prozess der 6σ-Bereich zur Gänze innerhalb vorgegebener Toleranzgrenzen liegt. Den Quotienten $c_p = \frac{\text{Toleranzbreite } T}{6\sigma}$ bezeichnet man als **Prozessfähigkeitsindex**.

ABC **9.75** Bei einer Fertigung wird mit $\mu = 15$ und $\sigma = 2{,}1$ gearbeitet. Fertige je eine Qualitätsregelkarte für die Überwachung dieses Prozesses für $n = 10$ und $n = 20$ an und vergleiche die Karten.

ABC **9.76** Die Stärke einer Kunstfaser ist normalverteilt mit $\mu = 0{,}02$ mm und $\sigma = 0{,}001$ mm.
1) Fertige eine Qualitätsregelkarte für $n = 7$ zur Überwachung der Produktion an.
2) Trage die folgende Stichprobe ein und interpretiere das Ergebnis:
0,019 mm 0,022 mm 0,021 mm 0,021 mm 0,023 mm 0,022 mm 0,024 mm

AB **9.77** Ein Kunde verlangt für die Dicke der Platten ein Maß von 3 cm ± 1 mm. Ermittle, wie groß die Standardabweichung sein muss, wenn $\mu = 3$ cm ist und ein c_p-Wert von
a) 0,67 ***b)*** 1 ***c)*** 1,3 gefordert wird.

AB **9.78** Wie groß darf σ höchstens sein, damit bei einer Toleranzbreite von
a) T = 1 ***b)*** T = 125 ***c)*** T = 0,05
der Prozessfähigkeitsindex mindestens 1,3 beträgt?

Zusammenfassung

(1 – α)-Zufallsstreubereich von N(μ, σ)
α … Irrtumswahrscheinlichkeit, Signifikanzniveau
Zweiseitig begrenzter Zufallsstreubereich: $x_{o,u} = \mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$
Einseitig nach oben begrenzter Zufallsstreubereich: $x_o = \mu + u_{1-\alpha} \cdot \sigma$
Einseitig nach unten begrenzter Zufallsstreubereich: $x_u = \mu - u_{1-\alpha} \cdot \sigma$

Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) der Normalverteilung

… für μ bei bekanntem σ (u-Verteilung):
Zweiseitiger (1 – α)-Vertrauensbereich:

$$\mu_{o,u} = \bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

… für μ bei unbekanntem σ (t-Verteilung):
Zweiseitiger (1 – α)-Vertrauensbereich:

$$\mu_{o,u} = \bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Vertrauensbereich für σ

$$\sigma_u = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}}}};\quad \sigma_o = s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;\,\frac{\alpha}{2}}}}$$

(1 – α)-Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für den Anteil p der Binomialverteilung:

$$p_u\!: \sum_{i=1}^{x-1} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{-k} = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad p_o\!: \sum_{i=1}^{x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{\alpha}{2}$$

Näherungsweise Berechnung des Anteils p aus der Schätzung $\hat{p}$:

$$p_u = \hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}};\quad p_o = \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \quad \text{mit } \hat{p} = \frac{x}{n}$$

Statistische Tests
Nullhypothese H_0, Alternativhypothese H_A
Fehler 1. Art (α-Fehler): Nullhypothese trifft zu, wird aber verworfen
Fehler 2. Art (β-Fehler): Nullhypothese trifft nicht zu, wird aber angenommen

Ausgleichsfunktion, Methode der kleinsten Quadrate
Die Differenzen $(\hat{y}_i - y_i)$ zwischen den gemessenen Werten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und den auf der Näherungsfunktion $\hat{y}$ liegenden Funktionswerten $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$ werden quadriert und aufsummiert. Die Koeffizienten der Funktion werden dann so ermittelt, dass die Summe der Abweichungsquadrate ein Minimum wird.
Ist die Ausgleichsfunktion eine Gerade, so wird diese auch **Regressionsgerade** genannt.

Pearson'scher Korrelationskoeffizient (Empirischer Korrelationskoeffizient)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

x_i, y_i … Koordinaten von i Messpunkten
$\bar{x}, \bar{y}$ … arithmetische Mittel

Der **Korrelationskoeffizient** r gibt die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Messgrößen an.

Beurteilende Statistik

Weitere Aufgaben

AB **9.79** Nach einem Unfall wird die Reißfestigkeit von Tragseilen überprüft. Bei einer Stichprobe vom Umfang 10 ergibt sich eine Standardabweichung von $5{,}2\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.
Gib einen 99-%-Vertrauensbereich für die Standardabweichung an.

AB **9.80** Bei der Überprüfung von 50 Ventilen waren fünf nicht in Ordnung.
Gib das 95-%-Konfidenzintervall für den Anteil der unbrauchbaren Ventile an.

ABCD **9.81** Eine Abfüllmaschine für 1-Liter-Mineralwasserflaschen wurde neu eingestellt. Zur Überprüfung werden 10 Flaschen entnommen und deren Inhalt gemessen (in ml):
993 997 1 002 1 003 992 995 990 1 001 991 1 004

1) Muss die Einstellung geändert werden? Triff deine Entscheidung mit 90%iger Sicherheit.
2) Wie kann man eine genauere Aussage erzielen?
3) Gib einen 99%igen Vertrauensbereich für σ an.
4) Bestimme das Signifikanzniveau, bei dem die Nullhypothese gerade noch verworfen wird und erläutere, welche Fälle noch auftreten könnten.

ABCD **9.82** Eine Abfüllanlage zur Portionierung von Softeis hat den Erwartungswert $\mu = 135\text{ cm}^3$ und die Standardabweichung $\sigma = 5\text{ cm}^3$.

1) Ermittle, welches Volumen 90 % der Portionen mindestens haben.
2) Der Umsatz war wegen Schlechtwetters sehr gering und das Softeis wurde sauer. Nach der Reinigung der Maschine könnte sich μ verändert haben. Zur Probe werden 10 Portionen abgefüllt, die insgesamt $1{,}28\text{ dm}^3$ ergeben. Muss man bei $\sigma = 5\text{ cm}^3$ mit einer Änderung von μ rechnen? Teste mit 95 % Sicherheit.
3) Die Abfüllanlage hatte ein Gebrechen und musste repariert werden. Beim Testlauf mit 15 Portionen wird ein Mittelwert von $0{,}127\text{ dm}^3$ und $s = 6\text{ cm}^3$ erhoben. Gib das 95-%-Konfidenzintervall für μ an.
4) Ein Vertreter bietet eine neue Maschine an, die angeblich genauer arbeitet. Im Testversuch hat sich bei einer Stichprobe vom Umfang 20 eine Standardabweichung $s = 3{,}1\text{ cm}^3$ ergeben. Überprüfe, ob man nun davon ausgehen kann, dass σ der neuen Maschine besser als 5 cm^3 wäre. Rechne mit 95 % und 99 % Sicherheit.

ABC TE **9.83** Bei der Messung der Extinktion einer Verdünnungsreihe ergaben sich folgende Werte:

Konzentration in $\frac{\text{mol}}{\text{L}}$	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0
Extinktion	0,003	0,016	0,025	0,160	0,280	0,400	0,600

1) Stelle die Werte in einem Diagramm grafisch dar.
2) Ermittle die Regressionsgerade.
3) Berechne den Korrelationskoeffizienten und beurteile, wie gut die lineare Näherung geeignet ist.

Aufgaben in englischer Sprache

confidence interval	Konfidenzintervall	random sample	Zufallsstichprobe
correlation coefficient	Korrelationskoeffizient	regression line	Regressionsgerade
method of least squares	Methode der kleinsten Quadrate	statistical test	statistischer Test

9.84 A sample of size 100 is taken from a population with a standard deviation of 16 but an unknown mean. If the sample mean is 44, find a 99 % confidence interval for the population mean. AB

9.85 A random sample of size 120 is taken from a population with a standard deviation of 3. Find a 95 % confidence interval for the population mean if the sample mean is 33.8. AB

9.86 A machine makes chocolate bars with weights that are normally distributed with a standard deviation of 8.2 grams. A random sample of 10 bars is chosen, with weights (in gram) as follows: ABD

251.3 257.2 249.5 254.3 252.6 256.1 254.7 255.3 254.8 252.6

A manager says that the mean weight of all bars made is 256 g. Investigate, at the 5 % significance level, whether the manager's assumption is correct.

9.87 Ticket prices for soccer games have steady growth, as shown in the following table. AB TE

Seasons	2000 – 2001	2001 – 2002	2002 – 2003	2003 – 2004	2004 – 2005	2005 – 2006
Average ticket price in £	35.25	36.05	36.90	37.65	38.62	40.02

1) Find the regression line.
2) Calculate the coefficient of correlation.
3) Use the regression line to predict the average ticket price of a soccer game in 2015 – 2016.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann den Unterschied zwischen einem Zufallsstreubereich und einem Vertrauensbereich erklären.	
2	Wenn ich einen Zufallsstreubereich ermitteln möchte, in dem 98 % der Daten liegen, dürfen nur jeweils ... außerhalb dieses Bereichs liegen.	
3	Ist die Standardabweichung einer Stichprobe gegeben, so muss ich die ☐ Normalverteilung / ☐ t-Verteilung zur Ermittlung des Vertrauensbereichs für den Erwartungswert verwenden.	
4	Liegt ein gegebener Erwartungswert μ im 95-%-Vertrauensbereich $[\mu_u; \mu_o]$, so bedeutet das, ...	
5	Ich kann das Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate erklären.	
6	Ich weiß, wie ich eine Ausgleichsfunktion unter Verwendung von Technologie ermitteln kann.	
7	Der Korrelationskoeffizient nach Pearson gibt an, ...	
8	Ein Korrelationskoeffizient von r = –0,8 bedeutet, dass die Steigung der Regressionsgeraden ... ist.	

Lösung:
1) siehe Seiten 228ff 2) 1 % 3) t-Verteilung 4) dass der Erwartungswert mit einer Sicherheit von 95 % im gegebenen Intervall liegt.
5) siehe Seiten 251 6) siehe Seiten 253 7) ob ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Größen besteht. 8) negativ

10 Algebra und Zahlentheorie

Die Zahlentheorie und die Boole'sche Algebra sind zwei wichtige Teilgebiete der Mathematik. Von der Antike bis in das 17. Jahrhundert behauptete sich die Zahlentheorie sogar als eigenständige Disziplin. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften ganzer Zahlen und dem Rechnen mit Restklassen. Die Zahlentheorie bildet eine wichtige Grundlage für die Verschlüsselung von Daten. George Boole (englischer Mathematiker, 1815 – 1864) entwickelte die nach ihm benannte Boole'sche Algebra. Mithilfe dieser Algebra, deren Elemente zwei Zustände – wahr oder falsch – sind, ist es möglich, die Aussagenlogik mathematisch zu erfassen und eine Grundlage für den Entwurf elektronischer Schaltungen zu liefern.

10.1 Boole'sche Algebra

10.1.1 Grundbegriffe

Bereits in Band 1, Abschnitt 1.8, wurden Aussagen und deren mögliche Verknüpfungen besprochen. Unter einer Aussage versteht man einen Satz, der wahr (w) oder falsch (f) sein kann. Eine Variable, die nur die beiden Werte w oder f annehmen kann, nennt man **Boole'sche Variable**. Fragen, Befehle oder Sätze, die im Widerspruch zur Grammatik stehen, sind keine Aussagen. Die Verknüpfung von Aussagen erfolgt mithilfe von **logischen Operatoren**, so genannten **Junktoren**, wie zum Beispiel Negation ($\neg$), Konjunktion ($\wedge$), Disjunktion ($\vee$), Implikation ($\Rightarrow$) oder Äquivalenz ($\Leftrightarrow$). In der folgenden Tabelle sind die Verknüpfungen von Boole'schen Variablen p und q mithilfe der genannten Junktoren aufgelistet. Die zu einem Junktor gehörende „Ergebnisspalte" nennt man **Wahrheitsverlauf**.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

AC **10.1** Formuliere die folgenden Aussagen unter Verwendung eines logischen Operators.
p ... Tom kauft Brot. q ... Tom kauft Milch.

1) Tom kauft Brot und Milch.
2) Wenn Tom Brot kauft, kauft er keine Milch.
3) Tom kauft Brot oder Milch.
4) Tom kauft weder Brot noch Milch.

Um festzustellen, ob es neben den oben genannten Junktoren noch weitere gibt, untersucht man alle möglichen Ergebnisse, die bei Verknüpfungen auftreten können. Wie bei mathematischen Operatoren unterscheidet man zwischen einstelligen Junktoren, die sich auf eine aussagenlogische Variable beziehen (entspricht zum Beispiel dem Quadrieren), und zweistelligen Junktoren (entspricht zum Beispiel der Addition zweier Zahlen).

einstelliger Junktor ... zB: $\neg p$ zweistelliger Junktor ... zB: $p \wedge q$

Mithilfe eines einstelligen Junktors erhält man vier mögliche Wahrheitsverläufe:

p	a_0	a_1	a_2	a_3
w	w	w	f	f
f	w	f	w	f

a_0 ... Tautologie – eine Aussage, die immer wahr ist
a_1 ... Identität von p
a_2 ... Negation von p
a_3 ... Kontradiktion – eine Aussage, die immer falsch ist

p → ? → a_i

In der Praxis wird meist nur die Negation benötigt.

Zweistellige Junktoren verknüpfen zwei Aussagen miteinander.
Es ergeben sich insgesamt 16 mögliche Ergebnisse:

p	q	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f

b_0:	Tautologie	b_4:	$p \Rightarrow q$	**b_8:**	**$\neg(p \wedge q)$**	b_{12}:	$\neg p$
b_1:	$p \vee q$	b_5:	q	b_9:	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	b_{13}:	$\neg(q \Rightarrow p)$
b_2:	$q \Rightarrow p$	b_6:	$p \Leftrightarrow q$	b_{10}:	$\neg q$	**b_{14}:**	**$\neg(p \vee q)$**
b_3:	p	b_7:	$p \wedge q$	b_{11}:	$\neg(p \Rightarrow q)$	b_{15}:	Kontradiktion

Zwei der 16 Junktoren sind in der Praxis von besonderer Bedeutung. Der Junktor b_8 entspricht der **Negation der Konjunktion** und wird als **NAND** („Not AND") bezeichnet. Der Junktor b_{14} entspricht der **Negation der Disjunktion** und wird **NOR** („Not OR") genannt.
Die Bedeutung dieser beiden Junktoren liegt darin, dass mit deren Hilfe alle anderen Junktoren äquivalent dargestellt werden können. In der Praxis hat das den Vorteil, dass es dadurch möglich ist, Schaltungen aus einer einzigen Sorte von Bauteilen zu konstruieren.

- Der **NAND**-Operator wird auch als **SHEFFER**-Operator bezeichnet und ist nach Henry Maurice Sheffer (amerikanischer Logiker, 1882 – 1964) benannt. Das Symbol für NAND ist $\Uparrow$.
  $p \Uparrow q = \neg(p \wedge q)$
- Der **NOR**-Operator wird auch als **PEIRCE**-Operator bezeichnet und ist nach Charles Sanders Peirce (amerikanischer Philosoph und Logiker, 1839 – 1914) benannt. Das Symbol für NOR ist $\Downarrow$.
  $p \Downarrow q = \neg(p \vee q)$

Es wird nun gezeigt, wie sich die Negation, die Konjunktion und die Disjunktion mithilfe von NAND bzw. NOR darstellen lassen. Dazu werden einige wichtige Äquivalenzen benötigt.

(1)	$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	Gesetz von De Morgan
(2)	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$	Gesetz von De Morgan
(3)	$a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$	
(4)	$a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$	
(5)	$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	
(6)	$(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$	

Bemerkung: Die rechte Seite des Ausdrucks (5) hätte auch ohne Klammern angeschrieben werden können, da für die Reihenfolge der Auswertung gilt: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

- Darstellung der **Negation**

  Um die Negation darzustellen, muss der Junktor auf sich selbst angewendet werden.

Mit NAND:

p	$p \Uparrow p$
w	f
f	w

$\neg p \Leftrightarrow (p \Uparrow p)$

Mit NOR:

p	$p \Downarrow p$
w	f
f	w

$\neg p \Leftrightarrow (p \Downarrow p)$

- Darstellung der **Konjunktion**

  Mit NAND: $p \wedge q = \neg\neg(p \wedge q) = \neg(p \Uparrow q) = ((p \Uparrow q) \Uparrow (p \Uparrow q))$

  Zuerst werden zwei Negationen ergänzt, wodurch sich der Wahrheitsgehalt nicht verändert. Da der NAND-Operator die **Negation der Konjunktion** ist, kann $\neg(p \wedge q)$ durch ein $(p \Uparrow q)$ ersetzt werden. Die verbleibende Negation $\neg(p \Uparrow q)$ wird ebenfalls mittels des NAND-Operators ausgedrückt.

  Mit NOR: $$p \wedge q = \underbrace{\neg\neg(p \wedge q)}_{\text{Ergänzen der doppelten Negation}} = \underbrace{\neg(\neg p \vee \neg q)}_{\text{Anwenden des Gesetzes von De Morgan (1)}} = \underbrace{\neg((p \Downarrow p) \vee (q \Downarrow q))}_{\text{Negation mit } \Downarrow \text{ ausgedrückt}} = \underbrace{((p \Downarrow p) \Downarrow (q \Downarrow q))}_{\text{Definition von } \Downarrow}$$

- Darstellung der **Disjunktion**

  Mit NOR: $p \vee q = \neg\neg(p \vee q) = \neg(p \Downarrow q) = ((p \Downarrow q) \Downarrow (p \Downarrow q))$

  Die Darstellung mit NAND erfolgt analog, siehe Aufgabe 10.5.

AB **10.2** Stelle einen äquivalenten Ausdruck zu $p \Rightarrow r \vee \neg s$ mithilfe von NAND auf.

Lösung:

$p \Rightarrow r \vee \neg s =$

$= \neg(p \wedge \neg(r \vee \neg s)) =$ — Umwandlung der Implikation (4)

$= \neg(p \wedge (\neg r \wedge s)) =$ — Anwenden des Gesetzes von De Morgan (2)

$= \neg(p \wedge \neg\neg(\neg r \wedge s)) =$ — Ergänzen fehlender Negationen zur zugehörigen Konjunktion

$= \neg(p \wedge \neg\neg((r \Uparrow r) \wedge s)) =$ — Darstellung von $\neg r$ mit NAND

$= \neg(p \wedge \neg((r \Uparrow r) \Uparrow s)) =$ — Definition von NAND

$= \neg(p \wedge (((r \Uparrow r) \Uparrow s) \Uparrow ((r \Uparrow r) \Uparrow s)) =$

$= (p \Uparrow (((r \Uparrow r) \Uparrow s) \Uparrow ((r \Uparrow r) \Uparrow s)))$ — Darstellung mit NAND

BD **10.3** Zeige die Äquivalenz des aussagenlogischen Ausdrucks anhand einer Wahrheitstabelle.

a) $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$
b) $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$
c) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$
d) $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$

BD **10.4** Zeige die Gültigkeit der beiden Gesetze von De Morgan anhand einer Wahrheitstabelle.

1) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$ und ***2)*** $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

AB **10.5** Stelle die Disjunktion $p \vee q$ mithilfe von NAND dar.

Aufgaben 10.6 – 10.7: Stelle einen äquivalenten Ausdruck zu den gegebenen mithilfe von ***1)*** NAND und ***2)*** NOR auf.

AB **10.6** ***a)*** $\neg r \vee s \wedge p$
b) $\neg p \wedge r \vee \neg q$
c) $s \Rightarrow \neg(p \wedge q)$
d) $\neg r \vee q \Rightarrow \neg p$

AB **10.7** ***a)*** $p \Rightarrow \neg s \vee (r \wedge q)$
b) $(p \vee s) \Leftrightarrow \neg(q \wedge r)$
c) $s \Leftrightarrow \neg p \Rightarrow r$
d) $\neg q \vee r \Leftrightarrow \neg s \wedge p$

10.1.2 Schaltalgebra

Die Boole'sche Algebra dient als grundlegendes Modell für die Schaltalgebra in der Digitaltechnik. Aussagenlogische Formulierungen lassen sich somit direkt auf elektronische Schaltungen übertragen.

Die **aussagenlogische Formel** entspricht dem **Schaltkreis** und der **Wahrheitsverlauf** der **Schaltfunktion**. Die Verknüpfungen der Variablen werden mithilfe von Halbleiterbausteinen, so genannten **Gattern**, umgesetzt. Dabei werden zwei Spannungszustände unterschieden:

- Dem Wahrheitswert **w** wird der Zustand **1**, also „**Strom fließt**" zugeordnet.
- Dem Wahrheitswert **f** wird der Zustand **0**, also „**kein Strom fließt**" zugeordnet.

Junktoren werden dabei durch Gatter dargestellt. Diese sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Bezeichnung	Symbol	Junktor	Bezeichnung	Symbol	Junktor
Inverter	1	$\neg p$	XNOR-Gatter	= 1	$p \Leftrightarrow q$
AND-Gatter	&	$p \wedge q$	NOR-Gatter	≥ 1	$p \Downarrow q$
OR-Gatter	≥ 1	$p \vee q$	NAND-Gatter	&	$p \Uparrow q$
XOR-Gatter	= 1	$\neg(p \Leftrightarrow q)$			

Bemerkung: Anstelle des Inverters wird in einer Schaltung oft nur ein Ringsymbol am Eingang des nächsten Gatters verwendet.

Mithilfe dieser Symbole kann jede aussagenlogische Formel als Schaltung dargestellt werden.
ZB: $p \wedge \neg q \vee r$

- Jede Variable wird als eigene Leitung dargestellt.
- Die Gatter werden entsprechend der benötigten Junktoren ausgewählt und gemäß ihrer Auswertungsreihenfolge mit den Leitungen verbunden.

10.8 Stelle die aussagenlogische Formel $p \vee \neg(q \wedge r)$ ausschließlich mit NAND-Gattern dar und zeichne die Schaltung.

AB

Lösung:

$p \vee \neg(q \wedge r) =$
$= \neg(\neg p \wedge (q \wedge r)) = \neg(\neg p \wedge \neg\neg(q \wedge r)) =$
$= (p \Uparrow p) \Uparrow ((q \Uparrow r) \Uparrow (q \Uparrow r))$

- Umwandlung in NAND

- Zeichnen der Schaltung

Für die Schaltalgebra sind einige Rechenregeln von Bedeutung:

Wichtige Rechenregeln für die Schaltalgebra			
$a \vee a \Leftrightarrow a$	Idempotenz der Disjunktion	$a \wedge a \Leftrightarrow a$	Idempotenz der Konjunktion
$a \vee w \Leftrightarrow w$		$a \wedge w \Leftrightarrow a$	
$a \vee f \Leftrightarrow f$		$a \wedge f \Leftrightarrow f$	
$a \vee \neg a \Leftrightarrow w$		$a \wedge \neg a \Leftrightarrow f$	
$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$	Kommutativgesetz	$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	Kommutativgesetz
$a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$	Assoziativität der Disjunktion		
$a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$	Assoziativität der Konjunktion		
$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	Distributivität der Disjunktion bezüglich der Konjunktion		
$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	Distributivität der Konjunktion bezüglich der Disjunktion		
$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$	Verschmelzungsgesetz		
$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$	Verschmelzungsgesetz		

AC **10.9** Zeichne die entsprechende Schaltung.

a) $\neg s \wedge r \Leftrightarrow \neg (q \vee p)$

b) $p \vee \neg r \wedge (\neg s \Leftrightarrow q)$

c) $r \wedge s \vee \neg (p \Leftrightarrow \neg q) \wedge \neg s$

d) $q \Leftrightarrow \neg s \wedge r \vee \neg p \Leftrightarrow \neg q$

AC **10.10** Gib eine passende Formel zur abgebildeten Schaltung an.

a) p q r s

b) p q r

ACD **10.11** Gib eine passende Formel zur abgebildeten Schaltung an. Überprüfe, ob sich die Schaltung vereinfachen lässt und führe die Vereinfachung gegebenenfalls durch.

a) p q r s

b) p q r s

AB **10.12** Ermittle für die aussagenlogische Formel $\neg s \wedge r \Rightarrow \neg p \vee q$ eine Schaltung, die ausschließlich aus ***1)*** NAND-Gattern, ***2)*** NOR-Gattern besteht.

AB **10.13** Ermittle für die aussagenlogische Formel $p \Leftrightarrow q \wedge \neg (r \vee \neg s)$ eine Schaltung, die ausschließlich aus ***1)*** NAND-Gattern, ***2)*** NOR-Gattern besteht.

10.1.3 Normalform

In der Praxis kennt man oft zunächst den Wahrheitsverlauf bzw. die einzelnen Ergebniszustände. Um eine dazu passende Schaltung zu konstruieren, wird eine aussagenlogische Formel benötigt, deren Auswertung dem gegebenen Wahrheitsverlauf entspricht. Die Vorgehensweise wird nun anhand eines Beispiels gezeigt.

ZB: Betrachtet man eine Verkehrsampel, so leuchtet diese in der abgebildeten Reihenfolge 1 bis 4. Der Leuchtzustand „Grün-Blinken" wird dabei vernachlässigt. Damit ergeben sich vier verschiedene Leuchtzustände. Jeder Leuchtzustand entspricht einer Zeile einer Wahrheitstabelle. Jede Lampe stellt einen eigenen Ausgang dar. Somit muss für jede einzelne Lampe eine eigene Formel konstruiert werden. Für eine vierzeilige Wahrheitstabelle werden zwei Variablen p und q benötigt. Damit ergibt sich folgende Wahrheitstabelle:

① ② ③ ④

p	q	rote Lampe	gelbe L.	grüne L.	Leuchtzustand
w	w	w	f	f	①
w	f	w	w	f	②
f	w	f	f	w	③
f	f	f	w	f	④

- Der Wahrheitsverlauf der roten Lampe entspricht dem von p.
- Für die gelbe Lampe gilt: $\neg q$
- Für die grüne Lampe gilt: $\neg p \wedge q$

Ist der Wahrheitsverlauf bekannt, kann für jede einzelne Lampe eine Formel gefunden werden. Anschließend kann die Schaltung gezeichnet werden.

p q

1

1

&

Erzeugt man aus dem Ergebnis einer Wahrheitstabelle eine Formel, die den angegebenen Wahrheitsverlauf liefert, bezeichnet man diese als **Normalform**.

Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten zur Ermittlung einer entsprechenden Formel gezeigt. Geht man von den Zeilen mit dem Ergebnis „wahr" aus, so kann durch Disjunktion der Formeln für die einzelnen Zeilen die so genannte **kanonisch disjunktive Normalform** (**KDNF**) ermittelt werden. Die **kanonisch konjunktive Normalform** (**KKNF**) ergibt sich als Konjunktion der Formeln für die Zeilen, in denen das Ergebnis „falsch" steht.

ZB: Das Ergebnis e einer Wahrheitstabelle mit den Variablen p, q, r ist bekannt. Eine zu diesem Wahrheitsverlauf äquivalente Formel ist gesucht.

p	q	r	e	
w	w	w	f	
w	w	f	w	(a)
w	f	w	f	
w	f	f	f	
f	w	w	w	(b)
f	w	f	f	
f	f	w	w	(c)
f	f	f	f	

Das Ergebnis e ist in den drei markierten Fällen wahr. Es ist also wahr, wenn der Fall (a) oder der Fall (b) oder der Fall (c) eintritt.

Die Ausdrücke (a) bis (c) werden als so genannte **Basiskonjunktionen** bezeichnet. Jede Basiskonjunktion enthält alle auftretenden Variablen in negierter oder nichtnegierter Form, die durch UND miteinander verbunden werden.

Durch die Verknüpfung der drei Fälle mit ODER spricht man von einer **disjunktiven Normalform**.

$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

p	q	r	e	
w	w	w	w	
w	w	f	f	(a)
w	f	w	f	(b)
w	f	f	w	
f	w	w	w	
f	w	f	w	
f	f	w	f	(c)
f	f	f	w	

Enthält eine Wahrheitstabelle im Ergebnis öfter den Wahrheitswert wahr, so kann auch für eine äquivalente Formel von den falschen Wahrheitswerten ausgegangen werden.

Ist die Variable wahr muss ihre Negation verwendet werden, um den Wahrheitswert falsch zu erhalten.

Durch ähnliche Überlegungen kann das Verfahren auf die f angewandt werden, um die **konjunktive Normalform** zu entwickeln.

$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$

Da hier die drei Fälle mit UND verknüpft werden, spricht man von einer **konjunktiven Normalform**.

B **10.14** Gib zum gegebenen Wahrheitsverlauf ***1)*** eine KDNF bzw. ***2)*** eine KKNF an.

p	q	r	***a)*** e	***b)*** e	***c)*** e	***d)*** e
w	w	w	f	w	w	f
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	f	f
f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w	f

B **10.15** Ermittle zuerst den Wahrheitsverlauf der Formel und stelle eine äquivalente ***1)*** KDNF bzw. ***2)*** KKNF auf.

a) $\neg p \wedge q \Rightarrow \neg (r \vee p)$

b) $q \vee \neg r \Leftrightarrow p$

c) $(\neg p \wedge r) \Leftrightarrow (s \vee \neg q \wedge r)$

d) $\neg (q \vee s) \Rightarrow p \Leftrightarrow r \vee \neg s$

BC **10.16** Gegeben ist die aussagenlogische Formel: $(((p \Uparrow q) \Uparrow (p \Uparrow q)) \Uparrow ((r \Uparrow r) \Uparrow s))$

1) Ermittle den Wahrheitsverlauf der Formel.

2) Gib eine äquivalente KKNF für diese Formel an.

AB **10.17** Ein Sicherheitssystem besteht aus drei Warnmeldern. Erstelle eine möglichst einfache Schaltung, die eine Sirene aufheulen lässt, wenn mindestens zwei der drei Warnmelder aktiviert werden.

AB **10.18** Zwei zweistellige Binärzahlen $Z_1 = (a_1\ a_0)$ und $Z_2 = (b_1\ b_0)$ sollen miteinander verglichen werden.

1) Erstelle eine Formel für den Fall, dass $Z_1 > Z_2$ ist.

2) Entwirf eine elektronische Schaltung.

3) Konstruiere eine Schaltung, die nur aus NAND-Gattern besteht.

AB **10.19** Mithilfe einer Sieben-Segmentanzeige sollen die Ziffern von 0 bis 9 dargestellt werden. Zwei dieser Segmente sollen mit einer Schaltung angesteuert werden. Der Leuchtpunkt ist dabei zu vernachlässigen.

1) Ermittle für das Segment b eine Schaltung, die nur aus NOR-Gattern besteht.

2) Konstruiere für das Segment c eine Schaltung, die nur aus NAND-Gattern besteht.

10.2 Codierung und Chiffrierung

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Zahlentheorie ist die **Kryptographie**, (griechisch: „kryptós“ = verborgen, geheim; „graphéin“ = schreiben). Im Laufe der Jahrhunderte wurden viele Methoden zur Übermittlung geheimer Nachrichten entwickelt, wie zum Beispiel wachsüberzogene Tafeln. Heutzutage werden zur sicheren Übertragung von Daten und Informationen computerunterstützte Verschlüsselungsmethoden verwendet, wie das RSA-Verfahren oder die Quantenkryptographie. Da die übermittelten Nachrichten meist in Form von Zahlen dargestellt werden, dienen das Rechnen mit Restklassen, die Primfaktorzerlegung und die Teilbarkeit als mathematische Grundlagen für die Verschlüsselung.

10.2.1. Rechnen mit Restklassen

10.20 Martina möchte 74 Schokoladepralinen verpacken. Sie möchte sechs Verpackungen so mit Pralinen füllen, dass überall die gleiche Anzahl an Pralinen enthalten ist. BD

1) Ermittle, wie viele Pralinen jede Schachtel enthält und wie viele Pralinen übrig bleiben.

2) Gib 3 weitere Pralinenanzahlen an, die bei Aufteilung auf 6 Schachteln den gleichen Rest ergeben.

Aus Band 3, Abschnitt 9.4, ist das Rechnen mit **Restklassen** bereits bekannt.
Ergibt die Division der ganzen Zahl a durch die ganze Zahl m den Rest r, so schreibt man:
$a \bmod m = r$
Für zwei ganze Zahlen a und b, die bei Division durch m denselben Rest haben, schreibt man:
$\mathbf{a \equiv b \bmod m}$ oder $\mathbf{a \equiv b\ (m)}$ [sprich: „a kongruent b modulo m“]
ZB: $1 \equiv 37 \equiv 85 \bmod 12$, da bei Division durch 12 diese Zahlen den Rest 1 haben.

Da bei der Division von a durch m nur die Reste 0, 1, 2, …, m – 1 entstehen können, fasst man alle Zahlen, die denselben Rest wie a haben, zu Restklassen zusammen.
Man schreibt: $\overline{a}$ oder $[a]_m$

Jede Zahl z einer Restklasse $[a]_m$ kann wie folgt angeschrieben werden:
$z = k \cdot m + a,\ k \in \mathbb{Z}$
ZB: $85 \equiv 1 \bmod 12 \Rightarrow 85 = 7 \cdot 12 + 1$

Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen **kongruent modulo** $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*$ ($a \equiv b \bmod m$), wenn sie bei der Division durch m denselben Rest haben.

Für die Addition und die Multiplikation von Restklassen gilt:
$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$ $\qquad$ $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$

Die folgenden Rechenregeln werden bei verschiedenen Verschlüsselungsverfahren benötigt.

- Restklassen können gliedweise miteinander multipliziert werden.
  Ist $\mathbf{a \equiv b \bmod m}$ und $\mathbf{c \equiv d \bmod m}$, dann gilt: $\mathbf{a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m}$
  ZB: $45 \equiv 3 \bmod 7$ und $88 \equiv 4 \bmod 7 \;\Rightarrow\; 45 \cdot 88 \equiv 3 \cdot 4 \bmod 7 \;\Rightarrow\; 3\,960 \equiv 5 \bmod 7$
- Werden 2 Elemente einer Restklasse mit demselben Exponenten potenziert, so bleibt die Kongruenz erhalten.
  Ist $\mathbf{a \equiv b \bmod m}$, dann gilt: $\mathbf{a^n \equiv b^n \bmod m}$ (n = 1, 2, 3, …)
  ZB: $12 \equiv 2 \bmod 5 \Rightarrow 12^2 \equiv 2^2 \bmod 5 \Rightarrow 144 \equiv 4 \bmod 5$

Weitere Rechenregeln für Restklassen
- Ist $\mathbf{a \equiv b \bmod m}$ und $\mathbf{c \equiv d \bmod m}$, dann gilt: $\mathbf{a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m}$
- Ist $\mathbf{a \equiv b \bmod m}$, dann gilt: $\mathbf{a^n \equiv b^n \bmod m}$ (n = 1, 2, 3, …)

ZB: $5^{12} \equiv$ **?** mod 3

$5^1 \equiv 2 \bmod 3$
$5^2 \equiv 2^2 \bmod 3 \equiv 1 \bmod 3$
$5^3 = 5^2 \cdot 5 \equiv 1 \cdot 2 \bmod 3 \equiv 2 \bmod 3$
$5^4 = 5^2 \cdot 5^2 \equiv 1 \cdot 1 \bmod 3 \equiv 1 \bmod 3$
$5^{12} = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \bmod 3 \equiv \mathbf{1} \bmod 3$

- Anwenden der Rechenregel für Potenzen
- Zerlegung der Potenz von 5 in Potenzen mit bekanntem Rest

Beim Arbeiten mit großen Zahlen und hohen Exponenten ist es trotz Technologieeinsatz oft nötig, eine Restklassenberechnung auf kleinere Zahlen zurückzuführen. Dabei ist es für das Entschlüsseln von Nachrichten oft notwendig, die kleinste natürliche Zahl z zu finden, für die gilt: $a^n \equiv z \bmod m$

Ein bereits 200 v. Chr. in Indien entwickelter Algorithmus zur Berechnung von z ist das **Square-and-Multiply-Verfahren**. Bei diesem Algorithmus wird der Exponent mithilfe der Binärdarstellung in eine Summe von Zweierpotenzen zerlegt. Damit kann die Potenz a^n als Produkt von kleineren Potenzen angeschrieben und die Zahl z mithilfe der Restklassen ermittelt werden.

ZB: Es soll die kleinste natürliche Zahl z ermittelt werden, für die gilt: $7^{41} \equiv z \bmod 5$

$41_{10} = 101001_2$ — Ermittlung der Binärdarstellung des Exponenten

$41 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0$ — Darstellung als Summe von Zweierpotenzen
$41 = 32 + 8 + 1$

$7^{41} = 7^{32} \cdot 7^8 \cdot 7^1$ — Zerlegung der Potenz in ein Produkt von Potenzen

$7^1 \equiv 2 \bmod 5$ — Rechenregeln für Restklassen anwenden
$7^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \bmod 5$
$7^4 = 7^2 \cdot 7^2 \equiv 4 \cdot 4 \bmod 5 \equiv 1 \bmod 5$
$7^8 = 7^4 \cdot 7^4 \equiv 1 \cdot 1 \bmod 5 \equiv 1 \bmod 5$
$7^{16} = 7^8 \cdot 7^8 \equiv 1 \cdot 1 \bmod 5 \equiv 1 \bmod 5$
$7^{32} = 7^{16} \cdot 7^{16} \equiv 1 \cdot 1 \bmod 5 \equiv 1 \bmod 5$
$7^{41} = 7^{32} \cdot 7^8 \cdot 7^1 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 2 \bmod 5 \equiv 2 \bmod 5$
$7^{41} \equiv 2 \bmod 5$
$\Rightarrow z = 2$

TE

Technologieeinsatz: Modulo-Rechnung

TI-Nspire

1.1 *Nicht gespeicherte
mod(7^41,5) 2
remain(7^41,5) 2

Beim TI-Nspire steht im Menü **2: Zahl**, **8: Zahlenwerkzeuge** der Befehl **5: Modulo** zur Verfügung.

Stattdessen kann auch der Befehl **remain** im Menü **2: Zahl**, **6: Rest** gewählt werden.

Erweiterter Euklid'scher Algorithmus

10.21 Zerlege die Zahlen 576 und 328 jeweils in ein Produkt von Primfaktoren. Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Zahlen.

B

Eine Methode zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers ist der **Euklid'sche Algorithmus**.

ZB: Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von 333 und 96.
ggT(333, 96)

333 : 96 = 3; Rest 45	• Die größere Zahl wird durch die kleinere dividiert.
96 : 45 = 2; Rest 6	• Die kleinere Zahl wird durch den vorherigen Rest dividiert.
45 : 6 = 7; Rest 3	• Dieser Vorgang wird bis zum Rest null wiederholt.
6 : 3 = 2; Rest 0	
ggT(333, 96) = 3	• Der letzte Divisor ist der größte gemeinsame Teiler.

Für die folgende Erweiterung des Euklid'schen Algorithmus wird eine Schreibweise benötigt, die sich aus Obigem ableiten lässt:
$333 = 3 \cdot 96 + 45 \quad \Rightarrow \quad 96 = 2 \cdot 45 + 6 \quad \Rightarrow \quad 45 = 7 \cdot 6 + 3 \quad \Rightarrow \quad 6 = 2 \cdot 3 + 0$

Mit dem **erweiterten Euklid'schen Algorithmus** kann der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b als **Linearkombination** der beiden Zahlen dargestellt werden:
$ggT(a, b) = r \cdot a + s \cdot b$

Sind die beiden Zahlen a und b zusätzlich teilerfremd, das heißt, der ggT(a, b) ist 1, so erhält man mit dem erweiterten Euklid'schen Algorithmus jene eindeutig bestimmte positive Zahl $c < b$, die die Gleichung **a · c mod b = 1** erfüllt. Die Zahl c wird **modulare Inverse** zu a mod b genannt. Die Bestimmung der modularen Inversen c wird nun anhand eines Beispiels gezeigt.

ZB: Es soll die modulare Inverse c zu 5 mod 38 berechnet werden.

ggT(38, 5) = 1	• Die Zahlen sind teilerfremd.
(1) $38 = 7 \cdot 5 + 3$	• Der Euklid'sche Algorithmus wird angewendet.
(2) $5 = 1 \cdot 3 + 2$	
(3) $3 = 1 \cdot 2 + 1$	
$2 = 2 \cdot 1 + 0$	

aus (3): $1 = 3 - 1 \cdot 2$ (4)	• Die einzelnen Zeilen werden nach den Resten umgeformt.
aus (2): $2 = 5 - 1 \cdot 3$	
aus (1): $3 = 38 - 7 \cdot 5$	

$1 = 3 - 1 \cdot 2$ • Die einzelnen Reste werden nun der Reihe nach in (4) eingesetzt.
$1 = 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) =$
$= 3 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$
$1 = 2 \cdot (38 - 7 \cdot 5) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 38 - 14 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 38 - 15 \cdot 5$

$1 = 2 \cdot 38 - 15 \cdot 5$ • Man erhält eine **Linearkombination** von 38 und 5 für den ggT(38, 5).

$-15 \equiv 23 \mod 38$	• Die Zahl –15 wäre die modulare Inverse zu 5. Da die modulare Inverse eine positive Zahl sein muss, wird 38 so oft addiert, bis man eine positive Zahl erhält.
$-15 + 38 = 23 = c$	
$5 \cdot 23 \mod 38 = 1$	
$c = 23$	• 23 ist dann die modulare Inverse zu 5 mod 38.

Algebra und Zahlentheorie

Mit dem **erweiterten Euklid'schen Algorithmus** kann man zu zwei natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ zwei ganze Zahlen r und s ermitteln, für die gilt: $\mathbf{r \cdot a + s \cdot b = ggT(a, b)}$
Sind die beiden Zahlen zusätzlich teilerfremd, also **ggT(a, b) = 1**, dann lässt sich jene eindeutig bestimmte positive Zahl $c < b$ finden, für die gilt: $\mathbf{a \cdot c \bmod b = 1}$
Die Zahl c wird **modulare Inverse** zu a mod b genannt.

AB **10.22** Berechne 5^{23} mod 3 mithilfe des Square-and-Multiply-Verfahrens.

Lösung:
$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 16 + 4 + 2 + 1$ ● Zerlegung des Exponenten in Zweierpotenzen
$5^1 \equiv 2 \bmod 3$
$5^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \bmod 3$
$5^4 \equiv (2^2)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \bmod 3$
$5^8 \equiv (2^4)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \bmod 3$
$5^{16} \equiv (2^8)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \bmod 3$
$5^{23} = 5^1 \cdot 5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^{16} \equiv 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 2 \bmod 3$

AB **10.23** Berechne die modulare Inverse c zu 5 mod 182.

Lösung:
$182 = 36 \cdot 5 + 2$ ● Anwenden des Euklid'schen Algorithmus
$5 \quad = 2 \cdot 2 + 1$
$2 \quad = 2 \cdot 1 + 0$ ● ggT(182, 5) = 1
Erweiterter Euklid'scher Algorithmus:
$1 = 5 - 2 \cdot 2$ ● Einsetzen der Reste
$1 = 5 - 2 \cdot (182 - 36 \cdot 5)$
$1 = 5 - 2 \cdot 182 + 72 \cdot 5$
$1 = 73 \cdot 5 - 2 \cdot 182$
$\Rightarrow 5 \cdot 73 \bmod 182 = 1$ ● Ermitteln der modularen Inversen

Die gesuchte modulare Inverse lautet 73, da $73 \cdot 5 \equiv 1 \bmod 182$.

B **10.24** Berechne.
a) 93 mod 14 **b)** 248 mod 6 **c)** 1 225 mod 9 **d)** 578 mod 7

BCD **10.25** Überprüfe, welche Aussagen richtig bzw. welche falsch sind. Stelle die Falschen richtig.
1) $29 \equiv 6 \bmod 8$ **2)** $2\,358 \equiv 3 \bmod 15$ **3)** $346 \equiv 4 \bmod 6$ **4)** $68 \equiv 3 \bmod 4$

AB **10.26** Berechne jeweils mithilfe des Square-and-Multiply-Verfahrens.
a) 7^{52} mod 5 **b)** 11^{23} mod 7 **c)** 115^{43} mod 9 **d)** 13^{34} mod 3

B **10.27** Berechne den größten gemeinsamen Teiler mithilfe des Euklid'schen Algorithmus.
a) ggT(420, 78) **b)** ggT(504, 220) **c)** ggT(405, 168) **d)** ggT(364, 150)

AB **10.28** Ermittle die modulare Inverse c.
a) $5 \cdot c \bmod 198$ **c)** $7 \cdot c \bmod 248$ **e)** $15 \cdot c \bmod 326$ **g)** $4 \cdot c \bmod 375$
b) $13 \cdot c \bmod 160$ **d)** $3 \cdot c \bmod 197$ **f)** $9 \cdot c \bmod 496$ **h)** $7 \cdot c \bmod 435$

10.2.2 Codierung

Bei der Verschlüsselung (Codierung) wird eine Information, auch **Klartext** genannt, in einen „unlesbaren", scheinbar sinnlosen Text, den **Geheimtext**, umgewandelt. Für diesen Vorgang wird ein so genannter **Schlüssel**, also eine Information, die man zum Ver- und Entschlüsseln braucht, benötigt. Bei den Verschlüsselungsverfahren unterscheidet man generell zwischen **symmetrischen** und **asymmetrischen Verfahren**.

- **Symmetrische Verfahren**
  Bei einem symmetrischen Verfahren wird zur Ver- und Entschlüsselung einer Nachricht **derselbe Schlüssel** verwendet.

  Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die **Caesar-Verschlüsselung**. Julius Caesar (römischer Konsul, Feldherr und Autor, 110 v. Chr. – 44 v. Chr.) verwendete diese nach ihm benannte Verschlüsselungsmethode für militärische Zwecke im Gallischen Krieg.
  Bei dieser Methode wird das Prinzip der Verschiebung verwendet. Caesar ersetzte jeden Buchstaben der Nachricht durch den Buchstaben, der drei Stellen weiter im Alphabet folgt:
  $A \Rightarrow D$, $B \Rightarrow E$, usw.
  Der Schlüssel ist hier die Anzahl der Stellen, um die das Alphabet verschoben wird.
  Um die Nachricht zu entschlüsseln, muss nur die Verschiebung wieder rückgängig gemacht, also der Schlüssel umgekehrt angewendet werden. Die **Entschlüsselung** erfolgt also durch die **Umkehr der Verschlüsselung**.

- **Asymmetrische Verfahren**
  Bei asymmetrischen Verfahren werden zur Ver- und Entschlüsselung **zwei verschiedene Schlüssel** verwendet.

  Die Funktionsweise eines solchen asymmetrischen Verfahrens soll anhand des folgenden Beispiels erklärt werden.
  Bob möchte Alice eine geheime Nachricht in einer Kiste zukommen lassen. Alice schickt ihm ein offenes Vorhängeschloss, zu dem nur sie den Schlüssel besitzt. Bob legt seine Nachricht in die Kiste und verschließt diese durch Zudrücken des Vorhängeschlosses. Er schickt die verschlossene Kiste an Alice. Sie öffnet das Schloss mit ihrem Schlüssel und liest die Nachricht. Das Schloss (die Verschlüsselung) verschließt die Nachricht, der Schlüssel (die Entschlüsselung) öffnet sie.

  Das offene Vorhängeschloss, mit dem die Kiste verschlossen wird, entspricht einem so genannten **öffentlichen Schlüssel**. Mit diesem Schlüssel kann jeder eine Nachricht verschlüsseln und an Alice schicken. Dieser öffentliche Schlüssel muss daher auch nicht geheim gehalten werden.
  Der Schlüssel, mit dem nur Alice das Vorhängeschloss öffnen kann, wird als **privater Schlüssel** bezeichnet. Dieser ist nur Alice bekannt und wird geheim gehalten. Nur wer diesen Schlüssel besitzt, kann die Nachricht entschlüsseln.

Symmetrische Verfahren
Zur Ver- und Entschlüsselung wird derselbe Schlüssel verwendet.

Asymmetrische Verfahren
Zur Ver- und Entschlüsselung werden zwei verschiedene Schlüssel verwendet.

RSA-Verfahren

Ein sehr bekanntes asymmetrisches Verfahren ist das nach Ronald **R**ivest (amerikanischer Mathematiker und Kryptograph, *1947), Adi **S**hamir (israelischer Kryptologe, *1952) und Leonard **A**dleman (amerikanischer Mathematiker und Molekularbiologe, *1945) benannte und 1977 veröffentlichte **RSA-Verfahren**.

Die Sicherheit des RSA-Verfahrens beruht darauf, dass zwei sehr große Primzahlen p und q für ein Produkt n gewählt werden. Zur Entschlüsselung einer Nachricht benötigt man die Zerlegung dieses Produkts in die beiden Primzahlen. Während die Berechnung des Produkts nur wenige Sekunden dauert, dauert das Faktorisieren hingegen selbst mit den schnellsten leistungsfähigsten Computern mehrere Jahre. Werden die beiden Primzahlen also genügend groß gewählt, geht man auch kein Risiko ein, wenn das Produkt der beiden Primzahlen veröffentlicht wird.

Das RSA-Verfahren wird heutzutage für die Authentifizierung von digitalen Unterschriften verwendet und soll hier nun im Folgenden anhand eines Beispiels erklärt werden.

- **Erzeugen des öffentlichen und privaten Schlüssels**

$n = p \cdot q$
$n = 29 \cdot 41 = 1\,189$

- Es werden zwei Primzahlen p = 29 und q = 41 gewählt und das Produkt n der beiden Zahlen gebildet.

$z = (p - 1) \cdot (q - 1)$
$z = 28 \cdot 40 = 1\,120$

- Man berechnet die Zahl z mit $z = (p - 1) \cdot (q - 1)$. Bemerkung: Der mathematische Hintergrund, warum z diese Form haben muss, würde den Rahmen hier übersteigen.

Öffentlicher Schlüssel: (e, n)
(e, n) = (17, 1 189)

- Nun wählt man eine Zahl e, die teilerfremd zu z ist, zum Beispiel e = 17

Privater Schlüssel: (d, n)

$e \cdot d \equiv 1 \bmod z$
$17 \cdot d \equiv 1 \bmod 1\,120$

- Die Zahl d ist die modulare Inverse zu e mod z.

$1\,120 = 65 \cdot 17 + 15$
$17 = 1 \cdot 15 + 2$
$15 = 7 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$

- Anwenden des Euklid'schen Algorithmus

$1 = 15 - 7 \cdot 2$
$1 = 15 - 7 \cdot (17 - 1 \cdot 15) = 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17$
$1 = 8 \cdot (1\,120 - 65 \cdot 17) - 7 \cdot 17$
$1 = 8 \cdot 1\,120 - 520 \cdot 17 - 7 \cdot 17$
$1 = 8 \cdot 1\,120 - 527 \cdot 17$
$-527 + 1\,120 = 593$
$\Rightarrow 1 \equiv 17 \cdot 593 \bmod 1\,120$
$\Rightarrow d = 593$

- Erweiterter Euklid'scher Algorithmus

privater Schlüssel: (d, n) = (593, 1 189)

- **Verschlüsseln der Nachricht**

Die Verschlüsselung der Nachricht erfolgt mit dem öffentlichen Schlüssel (e, n). Es gilt:
$y = x^e \bmod n$

x … Nachricht, Klartext
y … Geheimtext

Der Klartext x mit x = 4 soll mit n = 1 189 und e = 17 verschlüsselt werden.

$y = 4^{17} \bmod 1\,189$	● Anwenden der Formel
$y = 1\,050$	● Anwenden des Square-and-Multiply-Verfahrens
$x = 4$	

Die verschlüsselte Nachricht lautet somit: y = 1 050

- **Entschlüsseln einer Nachricht**

Die Entschlüsselung einer Nachricht y erfolgt mithilfe des privaten Schlüssels (d, n). Es gilt:
$x = y^d \bmod n$

Der Geheimtext y = 1 050 soll mit d = 593 und n = 1 189 entschlüsselt werden.

$x = 1\,050^{593} \bmod 1\,189$	● Anwenden der Formel
$1\,050^{593} \equiv 4 \bmod 1\,189$	● Anwenden des Square-and-Multiply-Verfahrens
$x = 4$	

Die Nachricht, die verschlüsselt wurde, lautet 4.

RSA-Verfahren

Produkt zweier Primzahlen: $n = p \cdot q$
$z = (p - 1) \cdot (q - 1)$

Öffentlicher Schlüssel: (e, n) mit e ist teilerfremd zu z
Privater Schlüssel: (d, n) mit $e \cdot d \equiv 1 \bmod z$

Verschlüsseln einer Nachricht x: $y = x^e \bmod n$
Entschlüsseln einer Nachricht y: $x = y^d \bmod n$

- **Ver- und Entschlüsselung von Texten**

Ist eine Nachricht in Textform verfasst, müssen die Buchstaben zuerst in Zahlenwerte umgewandelt werden. Man ersetzt dazu die Buchstaben zum Beispiel durch ihre Position im Alphabet:
A = 01, B = 02, C = 03, … sowie das Leerzeichen mit 00
Danach wird die Nachricht, die nun eine Zahl ist, verschlüsselt.

Da die Zahl, die den Text beschreibt, sehr viele Stellen hat, wäre die Verschlüsselung sehr aufwändig. Daher wird die Zahl in Blöcke unterteilt. Beim RSA-Verfahren ist die Größe der Blöcke üblicherweise um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen der Zahl $n = p \cdot q$. Dadurch ist gewährleistet, dass die zu verschlüsselnde Zahl kleiner als das Produkt n ist.
Hat die Zahl n zum Beispiel 3 Stellen, so werden Blöcke der Länge 2 gebildet. Die Blockbildung wird ganz links begonnen und am Ende gegebenenfalls mit Nullen aufgefüllt.
Anschließend wird jeder Block mit der bereits bekannten Formel verschlüsselt.
Beim Umwandeln der entschlüsselten Nachricht in Buchstaben müssen gegebenenfalls führende Nullen in den einzelnen Blöcken ergänzt werden.

AB TE

10.29 Verschlüssle die Nachricht HASE mit n = 1 219 und e = 37 mit dem RSA-Verfahren. Entschlüssle anschließend den Geheimtext.

Lösung:

HASE: H = 08, A = 01, S = 19, E = 05
- Umwandeln der Buchstaben in Zahlenwerte

Die zu verschlüsselnde Nachricht lautet: 08011905
- n … 4 Stellen ⇒ Blöcke der Länge 3

$x_1 = 080$; $x_2 = 119$; $x_3 = 050$

$y = x^e \bmod n = x^{37} \bmod 1\,219$
- Formel für die Verschlüsselung

$y_1 = 80^{37} \bmod 1\,219$

$y_2 = 119^{37} \bmod 1\,219$

$y_3 = 50^{37} \bmod 1\,219$
- Die zu verschlüsselnden Nachrichten werden eingesetzt.

Anwenden des Square-and-Multiply-Verfahrens:

$37_{10} = 100101_2$
- Binärdarstellung von 37

$37 = 2^5 + 2^2 + 2^0 = 32 + 4 + 1$
- Ermitteln der benötigten Zweierpotenzen

	A	B	C	D
1	Potenz	80	119	50
2	von 2	x_1	x_2	x_3
3	1	80	119	50
4	2	305	752	62
5	4	381	1107	187
6	8	100	354	837
7	16	248	978	863
8	32	554	788	1179
9				
10	y	332	440	233

- In die Zellen B3, C3 und D3 werden die zu verschlüsselnden Zahlen eingegeben.
- In den Zellen darunter wird mithilfe des Befehls **=REST(Zahl^2;Divisor)** der Rest berechnet.
  ZB in B4: **=REST(B3^2;1219)**
- Die Formeln werden bis zum gewünschten Wert kopiert.

- Die verschlüsselten Nachrichten erhält man durch Multiplikation der gewünschten Potenzen. ZB in B10: **=REST(B3*B5*B8;1219)**
- Die verschlüsselten Nachrichten lauten: $y_1 = 332$, $y_2 = 440$, $y_3 = 233$

Entschlüsseln der Nachricht:

$n = p \cdot q$
- Ermitteln der Faktoren p und q
  ZB TI-Nspire: mithilfe des Befehls im Menü **2: Zahl**, **3: Faktorisiere**

factor(1219) 23·53

$p = 23 \quad q = 53$

$z = 22 \cdot 52 = 1\,144$
- Berechnen des privaten Schlüssels (d, n)
  $z = (p-1)\cdot(q-1)$, $e \cdot d \equiv 1 \bmod z$

$37 \cdot d \equiv 1 \bmod 1\,144$

$37 \cdot 773 \equiv 1 \bmod 1\,144$

$d = 773$
- Ermitteln von d mithilfe des erweiterten Euklid'schen Algorithmus

15	Potenz	332	440	233
16	von 2	x_1	x_2	x_3
17	1	332	440	233
18	2	514	998	653
19	4	892	81	978
20	8	876	466	788
21	16	625	174	473
22	32	545	1020	652
23	64	808	593	892
24	128	699	577	876
25	256	1001	142	625
26	512	1202	660	545
27	x_a	67	811	604
28	x	80	119	50

- Entschlüsseln der Nachrichten:
  $x = y^d \bmod n$
  ZB: $x_1 = 332^{773} \bmod 1\,219$
- Anwenden des Square-and-Multiply-Verfahrens
- Die Berechnung erfolgt aufgrund des Rechenaufwands in 2 Schritten.
  ZB: $x_a = 332 \cdot 892 \cdot 1001 \bmod 1219$

$x_1 = 080$, $x_2 = 119$, $x_3 = 050$

Man erhält: 08 01 19 05 und damit das Wort HASE.
- Die entschlüsselten Nachrichten werden auf 3 Stellen mit führenden Nullen ergänzt.

10.30 Erkläre, welche Werte für eine Caesar-Verschlüsselung sinnvoll sind. Verschlüssle die Nachricht „TREFFPUNKT MORGEN MITTAG AN DER ALTEN EICHE“ mit einer Caesar-Verschlüsselung von 6. **ABD**

10.31 Folgende Nachricht wurde mit einer Caesar-Verschlüsselung verschlüsselt: UWBNOHA ZUFFY. Entschlüssle die Nachricht, wenn man annimmt, dass es sich dabei um einen sinnvollen deutschen Text handelt. **ABC**

Aufgaben 10.32 – 10.38: Bei den Aufgaben ist das RSA-Verfahren anzuwenden.

10.32 Verschlüssle jeweils die Zahl mit n = 2 627 und e = 31. **B**

a) 8 ***b)*** 48 ***c)*** 76 ***d)*** 112 ***e)*** 324

10.33 Verschlüssle die Zahlen 388 und 627, wenn der öffentliche Schlüssel (29, 1 139) bekannt ist. **B**

10.34 Sandra möchte die Zahlenkombination 3876 des PIN-Codes ihrer Bankomatkarte verschlüsseln. Sie verwendet dazu den öffentlichen Schlüssel mit n = 1 177 und e = 31. Ermittle den verschlüsselten PIN-Code. **AB**

10.35 Bernhard möchte Astrid die Nachricht „STERNSCHNUPPE“ verschlüsselt zukommen lassen. Er verwendet den öffentlichen Schlüssel mit n = 2 537 und e = 37 sowie Blöcke der Länge 3.
Ermittle die verschlüsselte Nachricht. **AB**

10.36 Geheimagent Müller möchte seine Kontaktperson zum Austausch wichtiger Unterlagen treffen. Er erhält eine verschlüsselte Nachricht über das Transportmittel, mit dem die Kontaktperson anreisen wird. **ABC**
Diese lautet: 1751 1384 0999 1070

1) Ermittle den privaten Schlüssel, der notwendig ist, um die Nachricht zu entschlüsseln, wenn der öffentliche Schlüssel (29, 1 817) verwendet wurde.

2) Entschlüssle die Nachricht.

10.37 Beim Geo-Caching versteckt jemand in einer Schatzkiste einen Zettel mit einer verschlüsselten Nachricht über das nächste Versteck. Der Zahlencode lautet: 939 815 688 **ABC**

1) Berechne den privaten Schlüssel, wenn der öffentliche Schlüssel (23, 1 273) lautet.

2) Gib an, wo sich das nächste Versteck befindet.

10.38 Um sein Rezept zu sichern, verschlüsselt ein Koch die Zutaten für seine Nachspeise. Eine dieser Zutaten wurde mit dem öffentlichen Schlüssel (31, 1 157) verschlüsselt und lautet: **ABC**
408 464 291 938 185 715 990

1) Ermittle den privaten Schlüssel.

2) Entschlüssle anschließend den Geheimtext.

10.39 Recherchiere im Internet die Funktionsweise der Vigenère-Verschlüsselung, benannt nach dem bekannten französischen Kryptographen Blaise de Vigenère (1523–1596). Erkläre die Funktionsweise dieses Verfahrens. **CD**

Algebra und Zahlentheorie

Zusammenfassung

Schaltalgebra
Mithilfe der Schaltalgebra lässt sich die Boole'sche Algebra auf die Digitaltechnik übertragen. Den einzelnen **Junktoren** entsprechen so genannte **Gatter**.

Für einheitliche Darstellungen von aussagenlogischen Ausdrücken werden die beiden Junktoren **NAND** und **NOR** verwendet.

Zum Erstellen einer Formel zu einem gegebenen Wahrheitsverlauf werden **Normalformen** verwendet. Man unterscheidet zwischen der **kanonisch disjunktiven Normalform** (**KDNF**) und der **kanonisch konjunktiven Normalform** (**KKNF**).

Codierung
Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen **kongruent modulo m** $\in \mathbb{N}^*$ ($a \equiv b \bmod m$), wenn sie bei der Division durch m denselben Rest haben.
Mit dem **erweiterten Euklid'schen Algorithmus** kann man zu je zwei natürlichen Zahlen a und b mit $b \neq 0$ zwei ganze Zahlen r und s ermitteln, für die gilt: $r \cdot a + s \cdot b = ggT(a, b)$
Sind die beiden Zahlen zusätzlich teilerfremd, also $\mathbf{ggT(a, b) = 1}$, dann lässt sich jene eindeutig bestimmte positive Zahl $c < b$ finden, für die gilt: $\mathbf{a \cdot c \bmod b = 1}$
Die Zahl c wird **modulare Inverse** zu a mod b genannt.

Für die Berechnung sehr hoher Potenzen modulo m verwendet man das **Square-and-Multiply-Verfahren**.

Symmetrische Verfahren:
Zur Ver- und Entschlüsselung wird **derselbe Schlüssel** verwendet, zB die Caesar-Verschlüsselung.

Asymmetrische Verfahren:
Zur Ver- und Entschlüsselung werden **zwei verschiedene Schlüssel** (**öffentlicher** und **privater Schlüssel**) verwendet, zB das RSA-Verfahren.

Weitere Aufgaben

10.40 Stelle einen äquivalenten Ausdruck zu dem gegebenen mithilfe von ***1)*** NAND und ***2)*** NOR auf.

a) $\neg q \Rightarrow r \wedge \neg p$
b) $(s \wedge \neg r) \Leftrightarrow \neg (q \vee s)$
c) $\neg (p \vee r \Rightarrow \neg s)$
d) $r \vee s \Leftrightarrow \neg p \wedge q$

10.41 Gib zum gegebenen Wahrheitsverlauf ***1)*** eine KDNF und ***2)*** eine KKNF an.

p	q	r	a)	e	b)	e	c)	e	d)	e
w	w	w		w		f		f		w
w	w	f		w		w		f		w
w	f	w		w		f		w		f
w	f	f		f		f		w		f
f	w	w		f		w		w		w
f	w	f		w		f		w		f
f	f	w		f		f		f		w
f	f	f		w		w		w		f

10.42 Erstelle eine elektronische Schaltung zu dem angegebenen Wahrheitsverlauf. **AB**

p	q	r	a) e	b) e	c) e	d) e
w	w	w	w	w	f	w
w	w	f	f	f	w	f
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w	w
f	f	f	w	f	w	f

10.43 Verschlüssle die Nachricht „KOMET“ mit dem öffentlichen Schlüssel mit n = 1 079 und e = 41. **B**

10.44 Jemand fängt die Nachricht 0102 0207 1095 0629 0655 0647 0168 ab. **AB**
Ermittle die unverschlüsselte Nachricht, wenn der öffentliche Schlüssel (43, 1 537) lautet.

Aufgaben in englischer Sprache

to encrypt	verschlüsseln	prime factorisation	Primfaktorzerlegung
greatest common factor	größter gemeinsamer Teiler	public key	öffentlicher Schlüssel
modulo	modulo	remainder	Rest

10.45 Use Euclid’s method to find the greatest common factor of (664, 84). **B**

10.46 Work out the value for x for 379 ≡ x mod 13. **B**

10.47 Encrypt the text „CAT“ with the public key n = 1 007 and e = 13. **BD**

Wissens-Check

		gelöst
1	Stelle die Konjunktion $p \wedge \neg q$ mithilfe von NOR dar.	
2	Überprüfe, welche Aussagen richtig bzw. welche falsch sind. Stelle die falschen Aussagen richtig. A) 46 ≡ 3 mod 7 B) 83 ≡ 5 mod 6 C) 112 ≡ 3 mod 11	
3	Ich kann das Square-and-Multiply-Verfahren erklären.	
4	Ich kenne den Unterschied zwischen einem asymmetrischen und einem symmetrischen Verschlüsselungsverfahren.	

Lösung:
1) $((p \Downarrow p) \Downarrow q) \Downarrow ((p \Downarrow p) \Downarrow q))$ 2) A) falsch, weil 46 ≡ 4 mod 7, B) richtig, C) falsch, weil 112 ≡ 2 mod 11 3) siehe Seite 274
4) siehe Seite 277

Vorbereitung auf die sRDP – Teil A

Der folgende Abschnitt besteht aus zwei Teilen. Im 1. Teil „Grundkompetenzen“ werden zu allen im Kompetenzkatalog Teil A angeführten Kompetenzen exemplarisch Aufgaben angegeben. Im 2. Teil „Übungsaufgaben“ werden zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung längere Übungsaufgaben angeboten. Sie beinhalten jeweils mehrere Teilaufgaben und decken verschiedene Inhalts- und Handlungskompetenzen ab.

Aufgaben zum Teil B (Cluster 1 bis Cluster 5) zur Vorbereitung auf die sRDP befinden sich in den jeweiligen Clusterheften – siehe Information auf Seite 320.

Grundkompetenzen

1 Zahlen und Maße

A_1.1 mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen rechnen, ihre Beziehungen argumentieren und auf der Zahlengeraden veranschaulichen

AC **1**
- Zeichnen Sie einen Zahlenstrahl und markieren Sie die beiden Zahlen: $-0{,}3$ und $\frac{17}{8}$
- Kennzeichnen Sie jene Zahl, die in der Mitte zwischen diesen beiden Zahlen liegt.
- Geben Sie den Wert dieser Zahl in Bruchschreibweise und in Dezimalschreibweise an.

CD **2**
- Geben Sie an, welche der folgenden Zahlen rational sind.
- Begründen Sie Ihre Antwort.

$1{,}\dot{2}$ $\quad \sqrt[3]{27}$ $\quad \left(\sqrt{2}\right)^4$ $\quad \sqrt{8}$ $\quad -3$

A_1.2 Zahlen in Fest- und Gleitkommadarstellung in der Form $\pm a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ darstellen und damit grundlegende Rechenoperationen durchführen

AB **3** In einem vollen Wasserglas sind $2{,}1 \cdot 10^n$ ($n \in \mathbb{N}$) Wassermoleküle.
- Ermitteln Sie, wie viele Wassermoleküle das Glas enthält, wenn es zu einem Viertel voll ist.
- Stellen Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung dar.

A_1.3 Vielfache und Teile von Einheiten mit den entsprechenden Zehnerpotenzen darstellen (Nano bis Tera); Größen als Maßzahl mal Maßeinheit darstellen

BD **4** Ein Lichtfuß ist jene Zeit, in der das Licht im Vakuum eine Strecke von einem Fuß (ft) zurücklegt. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt 299 792,458 Kilometer pro Sekunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$, ein Fuß hat eine Länge von 30,48 Zentimeter (cm).
- Zeigen Sie, dass 1 Lichtfuß ungefähr einer Nanosekunde (ns) entspricht.

A_1.4 überschlagsrechnen und runden, Ergebnisse beim Rechnen mit Zahlen abschätzen und in kontextbezogener Genauigkeit angeben

AB **5** Der durchschnittliche Grundumsatz eines Menschen wird üblicherweise mit 4,2 Kilojoule pro Kilogramm Körpermasse pro Stunde $\left(\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{h}}\right)$ angegeben.
- Berechnen Sie überschlagsweise den Energieverbrauch zur Deckung des Grundumsatzes eines Menschen in einem Jahr (365 Tage), wenn seine Masse im Mittel 78 kg beträgt.

A_1.5 Zahlenangaben in Prozent und Promille im Kontext anwenden und mit Prozentsätzen und Promillesätzen rechnen

6 Laut Statistik Austria lag der Energieverbrauch in Österreich im Jahr 2010 bei 404,906 Millionen Kilowattstunden (kWh). Die Grafik zeigt die Aufteilung auf die verschiedenen Bereiche.
– Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig ist.

C

2 % | 10 % | 34 % | 25 % | 29 %

Verkehr, Industrie, Privathaushalte, Landwirtschaft, Dienstleistungen

Der Energieverbrauch durch den Verkehr betrug weniger als ein Drittel des Jahresverbrauchs.	☐
Der Energieverbrauch durch die Industrie betrug 29 Promille des Jahresverbrauchs.	☐
Der Energieverbrauch durch die Landwirtschaft betrug $\frac{1}{200}$ des Jahresverbrauchs.	☐
Für Dienstleistungen wurden rund 40,5 kWh Energie verbraucht.	☐
Jede 4. Kilowattstunde des Jahresverbrauchs wurde durch einen Privathaushalt verbraucht.	☐

A_1.6 den Betrag einer Zahl verstehen und anwenden

7 Ein Konto wurde überzogen. Der Kontostand beträgt *a* Euro ($a < 0$). Nach Eingang des Lohns beträgt der Kontostand *b* Euro ($b > 0$).

A

– Stellen Sie eine Formel für den Lohn unter Verwendung des Betrags auf.

2 Algebra und Geometrie

A_2.1 rechnen mit Termen

8 – Kreuzen Sie an, welcher der folgenden Terme auf den Term $\frac{x+y}{y}$ umgeformt werden kann.

C

$\frac{y-x}{y}+1$	$\frac{xy+x}{xy}$	$\frac{xy+x^2}{xy}$	$\frac{2y-x}{xy}-1$	$2-\frac{y+x}{y}$
☐	☐	☐	☐	☐

A_2.2 Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligen und mit rationalen Exponenten anwenden; Potenz- und Wurzelschreibweise ineinander überführen

9 Die Quadrate der Umlaufzeiten U_1 und U_2 zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen a_1 und a_2.

AB

Dieser Zusammenhang wird 3. Kepler'sche Gesetz genannt: $\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$

– Erstellen Sie eine Formel für a_2 unter Verwendung des Wurzelzeichens.
– Geben Sie die ermittelte Formel mit rationalen Exponenten an.

A_2.3 Rechengesetze für Logarithmen anwenden

10 – Stellen Sie die fehlerhafte Umformung richtig.

BC

a) $\ln(1) - \ln(v) = \ln(1 - v)$

b) $\ln(y) = -\ln(x)$
$y = -x$

Vorbereitung auf die sRDP – Teil A

A_2.4 lineare Gleichungen in einer Variablen anwendungsbezogen aufstellen, lösen, die Lösungen interpretieren und argumentieren

AB

11 Franklin gibt $\frac{1}{3}$ seines Monatsgehalts für die Miete und die Betriebskosten seiner Wohnung aus. Lebensmittel und Versicherungen kosten jeweils $\frac{1}{6}$ des Gehalts, die Kreditraten machen $\frac{1}{8}$ seines Gehalts aus. Über die restlichen 500,00 Euro (€) kann er frei verfügen.
- Erstellen Sie eine Gleichung zur Ermittlung von Franklins Monatsgehalt.
- Ermitteln Sie Franklins Monatsgehalt.

A

12 Für die 1. Fahrt mit seinem Motorboot verwendet Christoph ein Benzin-Öl-Gemisch im Verhältnis 20 : 1. Für die weiteren Fahrten benötigt er ein Benzin-Öl-Gemisch im Verhältnis 25 : 1. Nach der 1. Fahrt sind noch 5 Liter des Benzin-Öl-Gemisches im Verhältnis 20 : 1 übrig. Christoph überlegt, wie viel Benzin er zu diesem Gemisch hinzufügen muss, um ein Benzin-Öl-Gemisch im Verhältnis 25 : 1 zu erhalten.
- Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der benötigten Benzinmenge.

A_2.5 Formeln aus der elementaren Geometrie anwenden, erstellen, begründen und interpretieren

C

13 – Kreuzen Sie an, welche Aussage auf die dargestellte Pyramide zutrifft.

$s^2 = \frac{a^2}{2} + h_2^2$	$h_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + s^2$	$h_1^2 = \frac{a^2}{4} + s^2$	$h_1^2 = h_2^2 - \frac{a^2}{4}$	$d^2 = \frac{a^2}{2}$
☐	☐	☐	☐	☐

BD

14 Die Spitze des Sekundenzeigers einer Uhr ist 1,5 Zentimeter (cm) von der Mitte der Uhr entfernt.
- Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$) sich die Spitze des Sekundenzeigers bewegt.
- Argumentieren Sie, ob sich die Geschwindigkeit der Zeigerspitze ändert, wenn die Länge des Sekundenzeigers verkleinert wird.

A_2.6 eine Formel nach einer der variablen Größen umformen und die gegenseitige Abhängigkeit der Größen in einer Formel interpretieren und erklären

BD

15 Das Gravitationsgesetz lautet: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

F … Kraft, G … Gravitationskonstante, m_1 und m_2 … Massen,
r … Abstand zwischen den Massen
- Erklären Sie, wie sich die Kraft ändert, wenn r halbiert wird und die anderen Größen unverändert bleiben.
- Stellen Sie eine Formel für den Abstand zwischen den Massen auf.

A_2.7 lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen anwendungsbezogen aufstellen, lösen und die verschiedenen möglichen Lösungsfälle argumentieren, interpretieren und grafisch veranschaulichen

AB

16 In der Apotheke kann man verschiedene Teesorten mischen lassen. Der Preis für 100 Gramm (g) Malve beträgt 4,20 Euro (€), jener für 100 g Melisse 3,10 €.
Peter bezahlt für 500 g Teemischung 19,35 €.
- Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Malven- und der Melissenmenge in der Teemischung auf.
- Ermitteln Sie, wie viel Peter für den Anteil der Malve in der Mischung bezahlt.

17 Gegeben ist folgendes Gleichungssystem: **ABD**

I: $x + 2y = 4$

II: $\frac{x}{3} + my = n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$

– Beschreiben Sie, welche Werte für die Parameter m und n eingesetzt werden müssen, damit es keine Lösung gibt.
– Ermitteln Sie, welche Werte für die Parameter m und n eingesetzt werden müssen, damit es unendlich viele Lösungen gibt.

A_2.8 lineare Gleichungssysteme mit mehreren Variablen anwendungsbezogen aufstellen, mithilfe von Technologieeinsatz lösen und das Ergebnis in Bezug auf die Problemstellung interpretieren und argumentieren

18 Die menschliche Nahrung besteht im Wesentlichen aus Kohlenhydraten, Fett und Eiweiß. 1 Gramm (g) Eiweiß liefert dem Körper 17 Kilojoule (kJ) Energie, 1 g Kohlenhydrate liefert ebenfalls 17 kJ und 1 g Fett liefert 39 kJ Energie. **AB**

Bei leichter körperlicher Arbeit benötigt ein Erwachsener täglich 9 200 kJ Energie. 80 % des Energiebedarfs sollen durch Eiweiß und Kohlenhydrate abgedeckt werden. Fett und Kohlenhydrate sollen 90 % des Energiebedarfs ausmachen.

– Berechnen Sie, wie viel Gramm Kohlenhydrate, Fett und Eiweiß zur Deckung des Energiebedarfs jeweils notwendig sind.

A_2.9 quadratische Gleichungen in einer Variablen anwendungsbezogen aufstellen, lösen und die verschiedenen möglichen Lösungsfälle interpretieren und argumentieren

19 Die Floridsdorfer Opernfreunde fahren nach Bratislava in die Oper. Die Kosten für die Fahrt betragen insgesamt 180,00 Euro (€). Kurzfristig sagen 3 weitere Personen zu. Dadurch werden die Fahrtkosten pro Person um 2,00 € geringer. **AB**

– Stellen Sie eine Gleichung zur Ermittlung der Anzahl der mitfahrenden Personen auf.
– Ermitteln Sie, wie viele Personen insgesamt mitgefahren sind.

20 Die Konzentration eines Medikaments im Blut kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Diese Funktion beschreibt die zeitabhängige Konzentration nur dann, wenn sie zwei positive reelle Nullstellen hat. **AD**

$f(t) = -0{,}1t^2 + 2t + c$

t ... Zeit nach der Einnahme

$f(t)$ ... Konzentration zur Zeit t

– Argumentieren Sie mithilfe der Diskriminante der entsprechenden Gleichung, für welche Werte des Parameters c dies der Fall ist.

A_2.10 Exponentialgleichungen vom Typ $a^{k \cdot x} = b$ nach der Variablen x auflösen

21 – Kennzeichnen Sie den Fehler und stellen Sie die Umformung richtig. **BC**

$$N(t) = N_0 \cdot a^{k \cdot t}$$

$$\frac{N(t)}{N_0} = a^{k \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = k \cdot t$$

$$t = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

A_2.11 Exponentialgleichungen oder Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen in einer Variablen mit Technologieeinsatz auflösen und das Ergebnis interpretieren

BD **22** Die Verkaufszahlen eines Smartphones lassen sich durch die Funktion y beschreiben.

$y(t) = \frac{3\,000}{1 + 3 \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $k = -0{,}08$

t … Zeit nach Verkaufsbeginn in Tagen
$y(t)$ … Anzahl der verkauften Smartphones zur Zeit t

– Berechnen Sie, wie lang es dauert, bis 1 000 Smartphones verkauft sind.

Die Verkaufszahlen eines Konkurrenzprodukts lassen sich durch die Funktion y beschreiben.

$y(t) = \frac{3\,000}{1 + 3 \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $k = -0{,}05$

– Argumentieren Sie, ob die Konkurrenz im gleichen Zeitraum mehr verkauft hat.

BC **23** Die Position der Zeigerspitze des Stundenzeigers einer Wanduhr lässt sich mit einer Funktion h beschreiben.

$h(t) = 7 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

t … Zeit nach Mitternacht in Stunden
$h(t)$ … Höhe in Zentimeter (cm) über der Mitte der Uhr zur Zeit t

– Stellen Sie die Funktion h im Intervall [0; 30] grafisch dar.
– Berechnen Sie die Höhe der Zeigerspitze um 14:30 Uhr.
– Veranschaulichen Sie in der Grafik die Zeit für einen vollen Zeigerumlauf.

A_2.12 Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck durch Sinus, Cosinus und Tangens eines Winkels angeben; Seiten und Winkel anwendungsbezogen berechnen

A **24** Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Simkarte.

– Stellen Sie eine Formel auf, mit der die Länge der Seite w in Abhängigkeit von m, n, v und α berechnet werden kann.

3 Funktionale Zusammenhänge

A_3.1 eine Funktion als eindeutige Zuordnung erklären und als Modell zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Größen interpretieren; den Graphen einer gegebenen Funktion mit Technologieeinsatz darstellen, Funktionswerte ermitteln und den Verlauf des Graphen im Kontext interpretieren

CD **25** In der nebenstehenden Abbildung ist die Anzahl der Besucher auf einer Elektronikmesse in Abhängigkeit von der Uhrzeit dargestellt.

– Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, in welchen Zeitintervallen die Besucherzahl abgenommen hat.

– Begründen Sie, ob es sich bei der Zuordnung „Uhrzeit ↦ Besucherzahl" um eine Funktion handelt.

A_3.2 lineare Funktionen anwendungsbezogen modellieren, damit Berechnungen durchführen, die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren; den Graphen einer linearen Funktion im Koordinatensystem darstellen und die Bedeutung der Parameter für Steigung und Ordinatenabschnitt kontextbezogen interpretieren; eine lineare Gleichung in zwei Variablen als Beschreibung einer linearen Funktion interpretieren

26 Der Kurs eines Wertpapiers lässt sich durch die Funktion W beschreiben. **BD**

$W(t) = -2{,}8 \cdot t + 135$

t … Zeit in Tagen

$W(t)$ … Wertpapierkurs in Euro (€) zur Zeit t

– Stellen Sie den zugehörigen Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem dar.
– Erklären Sie die Bedeutung der beiden Zahlenwerte –2,8 und 135 im Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit dieses Wertpapier nach diesem Modell 0 € beträgt.

27 Drei Wanderer sind auf derselben Wanderroute zwischen den beiden Rastplätzen Almwiese und Sonnenklamm unterwegs. Das nebenstehende Diagramm zeigt die Entfernung der Wanderer A und B von der Almwiese abhängig von der Zeit nach Beginn der Wanderung. **ABC**

– Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen im Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Entfernung des Wanderers A von der Sonnenklamm in Abhängigkeit von der Zeit.
– Beschreiben Sie, wie sich der zu Wanderer A gehörige Funktionsgraph ändert, wenn dieser eine halbe Stunde später startet.

Wanderer C startet gleichzeitig mit Wanderer A, ist aber um 1 Kilometer pro Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ langsamer.

– Zeichnen Sie den passenden Funktionsgraphen ein.

28 – Stellen Sie alle Lösungen der Gleichung $3x + 2y = 6$ grafisch dar. **AB**

A_3.3 Potenzfunktionen ($y = c \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$ sowie $y = \sqrt{x}$) grafisch darstellen und ihre Eigenschaften (Definitions- und Wertemenge, Symmetrie, Polstelle, asymptotisches Verhalten) anhand ihres Graphen interpretieren und damit argumentieren

29 Die Funktion v beschreibt jene Geschwindigkeit, mit der ein Körper, der aus der Höhe h fallen gelassen wird, am Boden auftrifft. **B**

$v(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ mit $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

h … Fallhöhe in Meter (m)

$v(h)$ … Aufprallgeschwindigkeit abhängig von der Fallhöhe h in Meter pro Sekunde $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

– Stellen Sie die Funktion v im Intervall [0; 5] grafisch dar.
– Veranschaulichen Sie in der Grafik jene Höhen, für die die Aufprallgeschwindigkeit kleiner als 18 Kilometer pro Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ ist.

30 – Bestimmen Sie jenes Intervall, in dem $f \geqslant g$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^4$ gilt. **B**

31 – Erklären Sie, welche Bedingung für die Hochzahl einer Potenzfunktion der Form $y = x^n$ gelten muss, damit sie durch den Punkt $P(-1|1)$ verläuft. **D**

D **32** Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$:
- Begründen Sie, warum der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse ist, wenn n gerade ist.
- Begründen Sie, warum der Funktionsgraph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, wenn n ungerade ist.

C **33** – Kreuzen Sie an, welche Aussage auf alle Funktionen f mit $f(x) = c \cdot x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zutrifft.

Der Graph von f ist eine Parabel.	☐
Der Graph von f hat genau eine Asymptote.	☐
Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.	☐
Die Funktion f hat eine Polstelle.	☐
Die Funktion f hat nur positive Funktionswerte.	☐

D **34** Die Seitenlänge eines Würfels wird verdoppelt.
- Erklären Sie, um welchen Faktor sich das Volumen des Würfels ändert.
- Erklären Sie, um welchen Faktor sich die Oberfläche des Würfels ändert.
- Ermitteln Sie, wie sich bei einer Funktion der Form $y(x) = c \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Funktionswert ändert, wenn das Argument verdoppelt wird.

ABCD **35** Zylindrische Getränkedosen werden produziert.

a) Das Volumen V der Dose beträgt 0,5 Liter.
- Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die Höhe h in Abhängigkeit vom gewählten Durchmesser d auf.
- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in einem sinnvollen Bereich.
- Interpretieren Sie den Funktionsgraphen für $d \to \infty$.

b) Die Höhe h der Dose beträgt 12 cm.
- Stellen Sie die Gleichung jener Funktion auf, die den Durchmesser d in Abhängigkeit vom Volumen V beschreibt.
- Beschreiben Sie, wie sich die Höhe h ändert, wenn der Durchmesser d verdoppelt wird.

A_3.4 Polynomfunktionen grafisch darstellen und ihre Eigenschaften bis zum Grad 3 (Null-, Extrem und Wendestellen, Monotonieverhalten) interpretieren und damit argumentieren

C **36** – Kreuzen Sie an, welche Aussage auf *alle* Funktionen f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a \neq 0$ zutrifft.

Die Funktion f hat genau drei Nullstellen.	☐
Die Funktion f hat im gesamten Definitionsbereich das gleiche Monotonieverhalten.	☐
Die Funktion f hat genau zwei Wendestellen.	☐
Die Funktion f hat bis zu drei Extremstellen.	☐
Die Funktion f hat genau einen Wendepunkt.	☐

A_3.5 Exponentialfunktionen grafisch darstellen, als Wachstums- und Abnahmemodelle interpretieren, die Verdoppelungszeit und die Halbwertszeit berechnen und im Kontext deuten sowie den Einfluss der Parameter von Exponentialfunktionen interpretieren

37 Die Vermehrung einer Insektenpopulation lässt sich durch die Funktion f beschreiben. **BD**
$f(t) = 100 \cdot 1{,}08^t$
t … Zeit nach Beginn der Beobachtung in Tagen
$f(t)$ … Anzahl der Insekten zur Zeit t
- Geben Sie den Wachstumsfaktor für 10 Tage an.
- Berechnen Sie, wie lang es dauert, bis sich die Anzahl der Insekten verdoppelt hat.
- Argumentieren Sie, ob die Verdoppelungszeit von der Größe der Insektenpopulation abhängt.

38 Der exponentielle Abbau des Wirkstoffs in einer Arznei im Körper lässt sich allgemein durch die Funktion N beschreiben. **C**
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
t … Zeit nach Beginn der Einnahme
$N(t)$ … Wirkstoffmenge im Körper zur Zeit t
- Interpretieren Sie die Bedeutung der Parameter N_0 und λ im Sachzusammenhang.
- Kreuzen Sie jene Gleichung an, mit der die Halbwertszeit des Wirkstoffs berechnet werden kann.

$-\ln(2) = -\lambda \cdot t$	$\frac{\ln(1)}{2} = -\lambda \cdot t$	$N_0 = \frac{N_0}{2} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\lambda \cdot t}$	$2 = e^{-\lambda \cdot t}$
☐	☐	☐	☐	☐

A_3.6 lineare Funktionen und Exponentialfunktionen strukturell vergleichen, die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktionen oder mittels Exponentialfunktionen argumentieren

39 An einem heißen Sommertag steigt ab 8:00 Uhr die Temperatur stündlich um 3 °C. Auf einem in der Sonne liegenden Käsebrot wächst eine Pilzkultur. Die vom Pilz bedeckte Fläche verdoppelt sich stündlich. **D**
- Argumentieren Sie, durch welchen Funktionstyp sich die Abhängigkeit der Temperatur von der Uhrzeit beschreiben lässt.
- Argumentieren Sie, durch welchen Funktionstyp sich die Abhängigkeit der von der Pilzkultur bedeckten Fläche von der Zeit beschreiben lässt.

40 Von den Funktionen y_1, y_2 und y_3 sind die folgenden Wertetabellen gegeben: **D**

x	−2	0	1	4
y_1	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

x	−2	0	1	4
y_2	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$

x	−2	0	1	4
y_3	1	4	8	64

- Begründen Sie jeweils, ob es sich um eine lineare Funktion oder eine Exponentialfunktion handelt.

Vorbereitung auf die sRDP – Teil A

A_3.7 die Nullstelle(n) einer Funktion gegebenenfalls mit Technologieeinsatz bestimmen und als Lösung(en) einer Gleichung interpretieren

BC **41** Die Gewinnfunktion für den Verkauf von Hosen lässt sich durch die Funktion G beschreiben.

$G(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}2x^2 + 5x - 8$

x … Anzahl der verkauften Hosen, $G(x)$ … Gewinn bei x verkauften Hosen in Geldeinheiten

– Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.
– Geben Sie den Bereich an, in dem Gewinn erwirtschaftet wird.

A_3.8 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen gegebenenfalls mit Technologieeinsatz bestimmen und diese im Kontext interpretieren

BC **42** Um mit einem bestimmten Schiff einen Yachthafen anfahren zu können, muss die Wassertiefe mindestens 2,1 Meter (m) betragen. Die Wassertiefe im Hafen im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 18:00 Uhr lässt sich durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = -0{,}125t^2 + 3{,}5t - 22 \quad \text{mit} \quad 10 \leq t \leq 18$

t … Zeit in Stunden nach Mitternacht, $h(t)$ … Wassertiefe zur Zeit t in Meter

– Stellen Sie die Funktion grafisch dar.
– Lesen Sie die maximale Wassertiefe ab.
– Interpretieren Sie die Gleichung $h(t) = 2{,}1$ im Sachzusammenhang.

A_3.9 anwendungsbezogene Problemstellungen mit geeigneten Funktionstypen (lineare Funktion, quadratische Funktion und Exponentialfunktion) modellieren

AB **43** Im Jahr 2000 wurde in einer Stadt mithilfe von erneuerbaren Energien eine Leistung von 500 Megawatt (MW) erbracht. Für das Jahr 2020 wird eine Leistung von 4 Gigawatt (GW) prognostiziert.

– Erstellen Sie ein lineares Modell zur Beschreibung der erbrachten Leistung in Abhängigkeit von der Zeit.
– Erstellen Sie ein exponentielles Modell zur Beschreibung der erbrachten Leistung in Abhängigkeit von der Zeit.

A_3.10 Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktionen mit Winkeln im Bogenmaß grafisch darstellen und die Eigenschaften dieser Funktionen interpretieren und argumentieren

C **44** In der Abbildung ist die Funktion $y = \cos(x)$ dargestellt.

– Tragen Sie in den Kästchen jeweils den Wert von x im Bogenmaß ein.

C **45** – Kreuzen Sie die richtige Aussage an.

An jeder Stelle, an der die Sinusfunktion eine Nullstelle hat, hat die Cosinusfunktion den Wert 1.	☐
Der Wertebereich der Funktionen $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ und $y = \tan(x)$ ist $[-1; 1]$.	☐
Für die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und π gilt: $\sin(x) = 0$.	☐
Für alle Winkel gilt: $\sin(x) = \sin(\pi - x)$	☐
Für alle Winkel gilt: $\sin(x + \pi) = \sin(x)$	☐

4 Analysis

A_4.1 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses argumentieren

46 Der in der Grafik dargestellte Funktionsgraph beschreibt die Temperatur von Tee in einer Thermosflasche. **D**

Temperatur in °C
100
80
60
40
20
0
Zeit in Minuten
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170

– Veranschaulichen Sie in der Grafik jene Zeitspanne, in der die Temperatur von 60 °C auf 40 °C sinkt.
– Erklären Sie, welche Temperatur der Tee nach langer Zeit annimmt.

47 In einem Parkhaus beträgt die Parkgebühr für jede angefangene Stunde 3,00 Euro (€). **D**
– Erklären Sie, warum die Kosten in Abhängigkeit von der Parkdauer nicht durch eine stetige Funktion beschrieben werden können.

A_4.2 Differenzen- und Differenzialquotient als Änderungsraten interpretieren, damit anwendungsbezogen modellieren, rechnen und damit argumentieren

48 Die Höhe eines Strauchs in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h beschrieben. **BC**
$h(t) = 0{,}3 \cdot e^{0{,}05 \cdot t}$
t … Zeit nach der Auspflanzung in Tagen
h … Höhe zur Zeit t in Meter (m)
– Stellen Sie die Funktion für den angegebenen Zeitraum grafisch dar.
– Interpretieren Sie den Graphen hinsichtlich der Wachstumsgeschwindigkeit des Strauchs.
– Veranschaulichen Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit in den ersten 7 Tagen.
– Ermitteln Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn des 7. Tags.

49 Ein Gepard auf der Jagd nach einer Gazelle startet aus dem Stand mit einer Beschleunigung von 3 $\frac{m}{s^2}$. **ACD**
Nach 15 Sekunden beträgt die Beschleunigung 0 $\frac{m}{s^2}$.
Die Weg-Zeit-Funktion dieser Bewegung lässt sich durch eine Polynomfunktion 3. Grads beschreiben.
– Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit dem diese Funktion ermittelt werden kann.

Die Abbildung zeigt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion der Bewegung des Geparden.
– Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen, wie sich die Beschleunigung des Geparden ändert.
– Erklären Sie die Bedeutung der Stelle, an der die Beschleunigung 0 $\frac{m}{s^2}$ beträgt im Sachzusammenhang.

Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$
22,5
Zeit in s
0
15
30

Vorbereitung auf die sRDP – Teil A

A_4.3 die Ableitungsfunktionen von Potenz-, Polynom- und Exponentialfunktionen und Funktionen, die aus diesen zusammengesetzt sind, berechnen

C **50** In einem Übungsheft eines Studierenden findet sich folgende Rechnung:
$f(x) = 2 \cdot e^{3x} \cdot (x^2 + 2)^3 \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot e^{3x} \cdot (x^2 + 2)^3 + 6 \cdot e^{3x} \cdot (x^2 + 2)^2$
– Kennzeichnen Sie den Fehler und korrigieren Sie diesen.

A_4.4 Monotonieverhalten, Steigung der Tangente und Steigungswinkel, lokale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte von Funktionen am Graphen ablesen, mithilfe der Ableitungen modellieren, berechnen, interpretieren und argumentieren

BD **51** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}4x^2 + 6x$ im Intervall $[0; 15]$.
– Berechnen Sie den Winkel, den der Funktionsgraph am Intervallanfang mit der senkrechten Achse einschließt.
– Geben Sie die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen am Intervallende an.
– Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, warum die Funktion f nur einen Extremwert und keinen Wendepunkt haben kann.

BCD **52** Die Anzahl b der Besucher, die an der Veranstaltung „Bewegung und Gesundheit" von 10:00 Uhr bis 19:30 Uhr teilnehmen, kann durch die Funktion b beschrieben werden.
$b(t) = \frac{65}{6} \cdot t^3 - 170t^2 + \frac{4\,075}{6} \cdot t + 400$
t ... Zeit nach 10:00 Uhr in Stunden
$b(t)$ ... Besucheranzahl zur Zeit t

– Stellen Sie die Funktion für den angegebenen Zeitraum grafisch dar.
– Berechnen Sie, um welche Uhrzeit die Besucheranzahl maximal ist.
– Argumentieren Sie mithilfe der 1. Ableitung, in welchem Zeitintervall die Besucheranzahl sinkt.
– Lesen Sie aus der Grafik den Wendepunkt ab.
– Beschreiben Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

BC **53** In einer bestimmten Gegend lässt sich die Anzahl der Moskitos in Abhängigkeit von der Niederschlagshöhe näherungsweise durch die Funktion M beschreiben.
$M(x) = \frac{1}{30} \cdot (50 - 32x + 14x^2 - x^3)$ für $0 \leqslant x \leqslant 10$
x ... Niederschlagshöhe in cm
$M(x)$ ... Anzahl der Moskitos M in Tausend
– Bestimmen Sie, bei welcher Niederschlagshöhe die Anzahl der Moskitos maximal ist.
– Geben Sie an, in welchem Bereich die Funktion positiv gekrümmt ist.

A_4.5 den Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion bzw. einer Stammfunktion beschreiben; in ihrer grafischen Darstellung interpretieren und argumentieren

ABD **54** Für eine Funktion f gilt: $f'(0) = 0$ und $f''(x) = -2$ für alle $x \in \mathbb{R}$
– Skizzieren Sie die Funktion f'.
– Begründen Sie, warum durch die gegebenen Informationen die Funktion f nicht eindeutig bestimmt ist.

A **55** Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
– Skizzieren Sie die Ableitungsfunktion von f.

56 Die Funktion F ist eine Stammfunktion der abgebildeten Funktion f.
- Begründen Sie, warum die Funktion F einen Wendepunkt hat.
- Begründen Sie, warum die Funktion F an der Stelle $x = 3$ ein lokales Minimum hat.

CD

57 Die Wachstumsrate f einer Karpfenpopulation hängt von der Anzahl der Karpfen ab und ist in der Abbildung dargestellt.

x … Anzahl der Karpfen
$f(x)$ … Wachstumsrate

C

- Setzen Sie richtig fort.

Gilt für die Anzahl x der Karpfen $\frac{K}{2} < x < K$, …	☐
Gilt für die Anzahl x der Karpfen $x = K$, …	☐

A	… bleibt die Anzahl konstant.
B	… sinkt die Anzahl der Karpfen.
C	… sind keine Karpfen vorhanden.
D	… vermehren sich die Karpfen.

A_4.6 Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen berechnen

58 – Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion F.

a) $f(x) = r^2 \cdot x + s \cdot \sqrt{k}$
b) $f(s) = r^2 \cdot x + s \cdot \sqrt{k}$
c) $f(r) = r^2 \cdot x + s \cdot \sqrt{k}$
d) $f(k) = r^2 \cdot x + s \cdot \sqrt{k}$

B

59 Auf der Südost-Tangente in Wien ereignet sich um 8:00 Uhr ein Unfall. Die Geschwindigkeit, mit der die Staulänge anwächst, lässt sich durch die Funktion v mit $v(t) = 10 \cdot t$ beschreiben.
t … Zeit nach Beginn des Staus in Stunden (h)
$v(t)$ … Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ zur Zeit t

- Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(t) = 5 \cdot t^2$ eine Stammfunktion der Funktion v ist.
- Erklären Sie die Bedeutung der Funktion F im Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie, wie lang der Stau um 8:45 Uhr ist.

BD

A_4.7 das bestimmte Integral auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes als Grenzwert einer Summe von Produkten interpretieren und damit argumentieren

60 Aus einem Becken strömt Wasser. In der Abbildung ist der Volumenstrom dargestellt.
- Begründen Sie anhand der Grafik, warum die in den ersten 3 Stunden ausgeströmte Wassermenge größer als 400 Liter sein muss.

D

Vorbereitung auf die sRDP – Teil A

C **61** – Erklären Sie, welche Größe mithilfe des Integrals beschrieben wird.

a) $\int_0^{t_1} v(t)\,dt$ mit $v(t)$ … Geschwindigkeit eines Läufers in Meter pro Sekunde, $v > 0$

b) $\int_0^{t_1} f(t)\,dt$ mit $f(t)$ … Downloadrate einer Datenmenge in Kilobits pro Sekunde

c) $\int_0^{t_1} w(t)\,dt$ mit $w(t)$ … Änderung der Wassermenge in einem Gefäß in $\frac{cm^3}{s}$, $w > 0$

A_4.8 das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt interpretieren und berechnen

AB **62** – Veranschaulichen Sie das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt.
– Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals mithilfe von geometrischen Überlegungen.

a) $\int_{-2}^{2} x\,dx$ **b)** $\int_{1}^{3} x\,dx$ **c)** $\int_{-4}^{2} (x+1)\,dx$ **d)** $\int_{-1}^{2} (3-x)\,dx$

A **63** – Skizzieren Sie eine Funktion mit drei Nullstellen, für die gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, $a \neq b$
– Skizzieren Sie eine Funktion mit drei Nullstellen, für die kein Intervall $[a; b]$ angebbar ist, sodass $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ gilt.

C **64** In den folgenden Abbildungen sind jeweils die beiden Funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ und $g(x) = 2x - 5$ dargestellt. Der blau gekennzeichnete Flächeninhalt soll berechnet werden.
– Ordnen Sie den Formeln den damit berechneten Flächeninhalt zu.

$\int_{2,5}^{5} g(x)\,dx - \int_{4}^{5} f(x)\,dx$	☐	$\int_{1}^{2,5} g(x)\,dx - \int_{1}^{4} f(x)\,dx$	☐

A	(Graph)	B	(Graph)	C	(Graph)	D	(Graph)

5 Stochastik

A_5.1 Daten statistisch aufbereiten, Häufigkeitsverteilungen (absolute und relative Häufigkeiten) grafisch darstellen und interpretieren sowie die Auswahl einer bestimmten Darstellungsweise anwendungsbezogen argumentieren

AB **65** In der Tabelle ist angeführt, wie oft eine Person mit Jahreskarte den Alpenzoo besucht.

Besuche pro Jahr	1	2	10	20	50
Personen mit Jahreskarte	60	542	574	631	324

– Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und die Häufigkeitssummen.
– Erstellen Sie ein Diagramm mit den absoluten Häufigkeiten.
– Erstellen Sie ein Diagramm mit den Häufigkeitssummen.
– Lesen Sie aus dem Diagramm der Häufigkeitssummen ab, wie viel Prozent der Personen mit Jahreskarte mindestens 10-mal den Alpenzoo besuchen.

A_5.2 Mittelwerte und Streuungsmaße empirischer Daten berechnen, interpretieren und argumentieren

66 An einem Würstelstand wurde über einen Zeitraum von 10 Tagen die Anzahl der verkauften Käsekrainer pro Tag festgehalten. **BCD**

52 6 71 65 61 53 68 52 70 56

– Ermitteln Sie die Spannweite, den Median und den Interquartilabstand.
– Beschreiben Sie, ob für diese Daten der Median oder das arithmetische Mittel ein aussagekräftigeres Lagemaß ist.

67 Die monatlichen Lebensmittelausgaben von vierköpfigen Familien wurden erfasst (Angaben in Euro (€)) und in einem Boxplot dargestellt. **CD**

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an.

Die Spannweite der Lebensmittelausgaben beträgt 250 €.	☐
50 % der Familien geben mehr als 650 € aus.	☐
25 % der Familien geben weniger als 450 € aus.	☐
Aus dem Boxplot kann das arithmetische Mittel abgelesen werden.	☐
75 % der Familien geben mehr als 700 € aus.	☐

– Begründen Sie, warum aufgrund des Boxplots keine Aussage über die Anzahl der erfassten Familien gemacht werden kann.

A_5.3 die Wahrscheinlichkeit als intuitiven Grenzwert relativer Häufigkeit interpretieren

68 Bei einem Farbflächenwürfel kommt die Farbe rot 2-mal vor, die anderen 4 Seitenflächen sind verschiedenfarbig. Jemand würfelt 100-mal. **C**

– Geben Sie an, welchem Prozentsatz sich der Anteil der Würfe, bei denen rot gewürfelt wird, nähert.

A_5.4 die Additionsregel auf einander ausschließende Ereignisse und die Multiplikationsregel auf unabhängige Ereignisse anwenden; Zufallsexperimente als Baumdiagramm darstellen

69 An einer Fachhochschule haben 35 % der Absolventinnen und Absolventen vor dem Studium eine AHS absolviert. 20 % davon beenden ihr Studium mit Auszeichnung. Von den restlichen Absolventinnen und Absolventen beenden 30 % das Studium mit Auszeichnung. **AD**

– Erstellen Sie ein Baumdiagramm, das diesen Sachverhalt beschreibt.
– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck $0{,}65 \cdot 0{,}7$ im Sachzusammenhang ermittelt wird.

Vorbereitung auf die sRDP – Teil A

A_5.5 mit der Binomialverteilung modellieren, ihre Anwendung begründen, Wahrscheinlichkeiten berechnen und die Ergebnisse kontextbezogen interpretieren

ABCD **70** In einem europäischen Land sind 40 % der Triebfahrzeugführerinnen und -führer einer Eisenbahngesellschaft wegen schwerer Sicherheitsmängel für Streikmaßnahmen.
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 10 von 20 zufällig ausgewählten Triebfahrzeugführerinnen und -führern für den Streik sind.
- Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck $\binom{20}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^{17}$ im Sachzusammenhang berechnet wird.
- Interpretieren Sie den Ausdruck $1 - 0{,}4^x$ im Sachzusammenhang.

ABD **71** Krapfen werden in Schachteln zu 20 Stück verpackt, 4 davon sind Vanillekrapfen, wobei die unterschiedliche Füllung der Krapfen von außen nicht erkennbar ist.
- Begründen Sie, warum bei der zufälligen Auswahl von 5 Krapfen, die Wahrscheinlichkeit, genau einen Vanillekrapfen zu erwischen, nicht mithilfe der Binomialverteilung modelliert werden kann.

4 % aller Schachteln werden beim Transport beschädigt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 zufällig ausgewählten Schachteln höchstens 2 beschädigt sind.

A_5.6 mit der Wahrscheinlichkeitsdichte und der Verteilungsfunktion der Normalverteilung modellieren, Wahrscheinlichkeiten berechnen und die Ergebnisse kontextbezogen interpretieren, Erwartungswert μ und Standardabweichung σ interpretieren und Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeitsdichte argumentieren

ABCD **72** Das Ausfahrtticket für eine Tiefgarage muss an einem Kassenautomaten durch Münzeinwurf bezahlt werden. Die Wartezeit vom Einwurf der letzten Münze bis zur Ticketausgabe ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 5$ Sekunden und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}3$ Sekunden.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit mindestens 5,5 Sekunden beträgt.
- Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für eine Wartezeit von höchstens 4 Sekunden ist.
- Begründen Sie, warum die Wahrscheinlichkeit für eine Wartezeit von mehr als 5,4 Sekunden genauso groß ist wie jene für eine Wartezeit von weniger als 4,6 Sekunden.
- Argumentieren Sie, welchen Einfluss eine Halbierung des Parameters σ auf die Fläche unter der Dichtefunktion einer Normalverteilung hat.
- Veranschaulichen Sie die in der Dichtefunktion gekennzeichnete Wahrscheinlichkeit in der Verteilungsfunktion.

x … Wartezeit in Sekunden

Übungsaufgaben

73 Tropfsteinhöhle

In einer Tropfsteinhöhle tropft von verschiedenen Stellen der Decke kalkhaltiges Wasser. Dadurch entstehen Kalkablagerungen, die im Lauf der Zeit zu Tropfsteinen werden. Dabei bilden sich von der Decke hängende Stalagtiten und vom Boden wachsende Stalagmiten.

a) Langjährige Beobachtungen in einer bestimmten Höhle haben ergeben, dass ein Stalagtit pro Jahr um 0,12 Millimeter (mm) wächst.

– Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$ in normiertem Gleitkommaformat an (1 Jahr ≙ 365 Tage). **B**

b) In der Grafik ist die Höhe *h* eines Stalagmits in Abhängigkeit von der Zeit *t* dargestellt.

Höhe
h_2
h_1
0
t_1
t_2
Zeit

– Dokumentieren Sie, wie die Wachstumsgeschwindigkeit mithilfe der Informationen aus dem Diagramm ermittelt werden kann. **C**

c) In einem unterirdischen See in der Tropfsteinhöhle gibt es Fadenalgen. Ihre Länge, abhängig von der Zeit, kann durch die Funktion ℓ beschrieben werden.

$\ell(t) = \ell_0 \cdot 1{,}1^t$

t … Zeit nach Beginn der Beobachtung in Jahren
$\ell(t)$ … Länge zur Zeit t
ℓ_0 … Anfangslänge

– Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen zutrifft. **C**

Ein Jahr nach Beginn der Beobachtung ist die Alge um 1 % länger geworden.	☐
5 Jahre nach Beginn der Beobachtung ist die Alge um 50 % länger geworden.	☐
Ein Jahr nach Beginn der Beobachtung ist die Alge um 10 % länger geworden.	☐
2 Jahre nach Beginn der Beobachtung hat sich die Länge der Alge verdoppelt.	☐
Ein Jahr nach Beginn der Beobachtung ist die Alge 10-mal so lang geworden .	☐

d) Durch die Höhle können Führungen gebucht werden. Von den *e* Erwachsenen einer Reisegruppe nehmen *x* an der Führung teil, von den *k* Kindern dieser Reisegruppe sind alle bis auf 3 dabei.

– Stellen Sie den Term auf, der die Anzahl der nicht an der Führung teilnehmenden Mitgliedern der Reisegruppe angibt. **A**

a) A_1.2, ***b)*** A_4.2, ***c)*** A_3.5, ***d)*** A_2.1

74 Schneekoppe

Der höchste Berg Tschechiens ist die Schneekoppe (Sněžka). Bis zum Jahr 2012 gelangte man mit einem der ältesten Sessellifte der Welt von der auf 1 354 Meter (m) Seehöhe gelegenen Mittelstation zur Bergstation auf 1 594 m Seehöhe. Die mittlere Steigung betrug dabei 12,86 %.

A **a)** – Erstellen Sie eine Skizze, die den oben beschriebenen Sachverhalt darstellt.

B – Berechnen Sie die horizontale Entfernung zwischen Mittelstation und Bergstation.

b) Zwischen zwei Stützen kann der Verlauf des Tragseils des Sessellifts annähernd durch eine quadratische Funktion beschrieben werden.

Höhe
r
P_2
P_3
P_1
m
Entfernung
0
s

A – Erstellen Sie mithilfe der Zeichnung ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser quadratischen Funktion.

c) Im Jahr 2014 wurde der Sessellift durch eine Gondelbahn ersetzt. Die neue Gondelbahn benötigt für eine Strecke von 1 969 m eine Fahrzeit von 8,4 Minuten (min). Insgesamt gibt es 17 Gondeln.

B – Berechnen Sie den Abstand zwischen 2 Gondeln (Gondelaufhängungen).

B – Geben Sie die Geschwindigkeit einer Gondel in Kilometer pro Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ an.

d) Die Mindestbruchkraft F_{min} ist jene Kraft, mit der ein Drahtseil im Zugversuch mindestens belastet werden kann, bevor es reißt. Sie lässt sich mithilfe folgender Formel berechnen:

$$F_{\text{min}} = \frac{f \cdot R_m \cdot k \cdot d^2 \cdot \pi}{4}$$

f … Füllfaktor (Anteil des Stahlquerschnitts am Gesamtquerschnitt)
R_m … Festigkeit des Stahls
k … Verseilfaktor
d … Durchmesser des Seils

D – Erklären Sie anhand der Formel, wie sich die Mindestbruchkraft ändert, wenn der Radius des Seils verdoppelt wird.

a) A_2.12, **b)** A_2.7, **c)** A_1.1, A_1.3, **d)** A_2.6

75 Thermalbad

In einer großen Therme wird die Anzahl der Gäste erfasst. Das Schaubild zeigt die Änderung der Gästezahl pro Stunde an einem bestimmten Tag zwischen 12:00 Uhr und 21:00 Uhr.

t … Zeit nach 12:00 Uhr in Stunden
$b(t)$ … Änderung der Gästezahl zur Zeit t in 100 Personen pro Stunde

a) – Erklären Sie jeweils die Bedeutung der Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 zwischen dem Funktionsgraphen und der waagrechten Achse. **D**

b) – Kreuzen Sie die richtige Aussage in der Tabelle an. **C**

Um 15:00 Uhr sind mehr Gäste in der Therme als um 12:00 Uhr.	☐
Um 16:30 Uhr sind die meisten Gäste in der Therme.	☐
Zwischen 12:00 Uhr und 19:00 Uhr betreten weniger Gäste die Therme als Gäste die Therme verlassen.	☐
Zwischen 12:00 Uhr und 14:00 Uhr nimmt die Anzahl der Gäste zu.	☐
Um 19:00 Uhr sind mehr Gäste in der Therme als um 14:00 Uhr.	☐

c) Die Anzahl der Besucher (in 100) kann durch die Funktion B beschrieben werden.

$$B(t) = -\frac{8}{75} \cdot t^3 + \frac{36}{25} \cdot t^2 - \frac{112}{25} \cdot t + C$$

t … Zeit nach 12:00 Uhr in Stunden
$B(t)$ … Anzahl der Besucher zur Zeit t in 100

– Zeigen Sie, dass die Funktion B eine Stammfunktion der Funktion b ist. **D**

Um 14:00 Uhr befinden sich 300 Gäste in der Therme.

– Bestimmen Sie den Wert von C. **B**

– Berechnen Sie die Anzahl der Thermengäste um 17:00 Uhr. **B**

a) A_4.8, **b)** A_4.2, **c)** A_4.5, A_4.6, A_3.1

76 Röntgendiagnostik

Bei der Röntgendiagnostik, kurz Röntgen genannt (Wilhelm Conrad, Röntgen, deutscher Physiker, 1845 – 1923), wird ein Körper unter Verwendung eines Röntgenstrahlers durchstrahlt. Das Ergebnis dieser Durchdringung wird in Bildern festgehalten, die als Röntgenbilder oder Röntgenaufnahmen bezeichnet werden.

a) Auf einem Film befindet sich eine silberhältige Emulsionsschicht, die durch die Röntgenstrahlen geschwärzt wird.
Als Maß für die Schwärzung S eines Films gilt:

$$S = \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

I ... durchgelassene Intensität in Watt pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$
I_0 ... einfallende Intensität in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
S ... Schwärzung eines Films

D
– Argumentieren Sie mithilfe der Logarithmus-Rechenregeln, ob ein Film der Schwärzung $S = 2$ doppelt so viel der einfallenden Strahlungsintensität durchlässt wie ein Film der Schwärzung $S = 1$.

B
– Formen Sie die Formel nach der Variablen I um.

b) Patienten werden mithilfe von Bleischürzen vor Röntgenstrahlung geschützt. Für die durchgelassene Strahlungsintensität I gilt das Bouguer-Lambert'sche Gesetz.

$$I(d) = I_0 \cdot e^{-2{,}05 \cdot d}$$

d ... Dicke der Bleischürze in Zentimeter (cm)
I_0 ... Anfangsintensität in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$I(d)$ ... durchgelassene Strahlungsintensität bei der Dicke d in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

B
– Berechnen Sie, wie dick die Bleischürze in Millimeter (mm) mindestens sein müsste, damit die Strahlungsintensität auf weniger als 10 Prozent von I_0 abgeschwächt wird.

c) Ein Institut stellt seine Röntgenanlage von analog auf digital um. Für die analoge Röntgenanlage fielen monatliche Kosten von 70 000,00 € an. Bei der digitalen Variante betragen die einmaligen Anschaffungskosten 780 000,00 € und die monatlichen Kosten 40 000,00 €.

B
– Ermitteln Sie, nach wie viel Monaten sich die Umrüstung auf die digitale Anlage amortisiert hat.

d) Bei den Röntgenbildern eines Diagnosezentrums haben 2 % der Bilder einen Belichtungsfehler. Unabhängig davon sind bei 4 % der Bilder die Patienten falsch positioniert.

D
– Erklären Sie, welche Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck $1 - 0{,}98 \cdot 0{,}96$ im Sachzusammenhang berechnet wird.

a) A_2.3, ***b)*** A_2.10, ***c)*** A_3.2, ***d)*** A_5.4

77 Aktien

Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung einer Aktie innerhalb von 3 Tagen.

	1. Tag	2. Tag	3. Tag
Aktienwert in €	103	105	108

a) Ein Aktionär möchte eine Vorhersage für den 4. Tag treffen. Er erstellt ein lineares Wachstumsmodell mit den Daten des 2. und des 3. Tags.

– Stellen Sie das Modell grafisch dar. **AB**

– Lesen Sie ab, welcher Aktienwert aufgrund dieses Modells am 4. Tag zu erwarten ist. **C**

b) Eine Anlageberaterin geht von exponentiellem Wachstum aus.

– Erstellen Sie anhand der Daten des 1. und des 2. Tags ein exponentielles Wachstumsmodell. **A**

– Berechnen Sie den prozentuellen Unterschied zwischen dem tatsächlichen Aktienwert am 3. Tag und dem aufgrund des exponentiellen Modells prognostizierten Werts. **B**

c) Ein Finanzberater schlägt seinen Kunden drei verschiedene Aktien A, B und C vor. Herr Müller investiert in 2 Aktien von A, 3 Aktien von B und einer Aktie von C insgesamt 2 400,00 €. Frau Maier bezahlt für 4 Aktien von A und einer Aktie von C insgesamt 1 900,00 €. Frau Schmid bezahlt für 2 Aktien von B und 3 Aktien von A insgesamt 2 100,00 €.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem der Kaufpreis der einzelnen Aktien ermittelt werden kann. **A**

– Berechnen Sie die jeweiligen Kaufpreise. **B**

d) Zwei Aktienberater einer Bank laden Kunden zu Beratungsgesprächen ein. Berater A lädt 40 % der Kunden ein, Berater B alle übrigen. Zu Berater A kommen 13 % der von ihm eingeladenen Kunden. Bei Berater B nehmen 23 % der von ihm eingeladenen Kunden den Termin wahr.

– Ergänzen Sie das Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. **C**

– Beschreiben Sie die notwendigen Rechenschritte und Rechenregeln für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein eingeladener Kunde zum Beratungsgespräch erscheint. **D**

von A eingeladen | von B eingeladen

Kunde kommt | Kunde kommt nicht | Kunde kommt | Kunde kommt nicht

a) A_3.2, A_3.1, **b)** A_3.9, A_1.5, **c)** A_2.8, **d)** A_5.4

78 „La Géode"

Im „La Géode", einem kugelsegmentförmigen Edelstahlbau im „Parc de la Villette" in Paris, befindet sich ein Kino.

a) In der untenstehenden Abbildung ist der Querschnitt von „La Géode" dargestellt.

O, $R_{Kugel} = 18\,m$, 52°, Boden, H, M

B – Berechnen Sie die Länge der Strecke *HM*.

B – Ermitteln Sie die Größe der Grundfläche des Gebäudes.

b) Die Oberfläche des Kugelsegments beträgt 4 630,3 Quadratmeter (m^2) und soll mit einer Spezialbeschichtung versehen werden. Der Preis pro m^2 beträgt *p* Euro (€) ohne Mehrwertsteuer.

A – Stellen Sie eine Formel für den Gesamtpreis inklusive 20 % Mehrwertsteuer auf, wenn 3 % Rabatt gewährt werden.

c) 17 % der Besucherinnen und Besucher des "La Géode" sind Touristen aus Deutschland. Für eine Umfrage werden 40 Besucher zufällig ausgewählt.

D – Erklären Sie, welche Wahrscheinlichkeit mit folgendem Ausdruck im Sachzusammenhang berechnet wird:

$$\binom{40}{3} \cdot 0{,}17^3 \cdot 0{,}83^{37}$$

d) Im folgenden Boxplot sind die Besucherzahlen des „Parc de la Villette" in Millionen vom Jahr 1996 bis zum Jahr 2012 dargestellt.

Bezucherzahlen in Millionen; 2,6 2,7 2,8 2,9 3 3,1 3,2 3,3 3,4 3,5 3,6 3,7 3,8 3,9

C – Ermitteln Sie den Interquartilabstand.

D – Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„In 15 Jahren des untersuchten Zeitraums lag die Besucherzahl unter 3,1 Millionen."

a) A_2.12, A_2.5, **b)** A_1.5, **c)** A_5.5, **d)** A_5.1, A_5.2

79 Olympische Spiele

Bei den olympischen Winterspielen 2014 in Sotschi (Russland) war Slopestyle als olympische Disziplin erstmals zugelassen. Dabei wird ein Hindernisparcours mit unterschiedlichen Hindernissen durchfahren und von einer Jury bewertet.

a) Auf dem Parcours befindet sich eine 2 Meter (m) große Matroschka-Figur, die man bei einem Sprung mit dem Snowboard berühren muss, um Extrapunkte zu bekommen. Zur Vorbereitung wird eine Computersimulation des Sprungs erstellt.

Die Sprungbahn eines Slopestylers wird dabei durch folgende Parabel modelliert.

$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + p \cdot x + 1$ mit $p \in \mathbb{R}$

x, y ... Koordinaten in m

Die Figur soll genau im höchsten Punkt des Sprungs berührt werden.

– Beschreiben Sie, welche Stellen mithilfe der Gleichung $-\frac{1}{2} \cdot x^2 + p \cdot x + 1 = 2$ ermittelt werden. **A**

– Erklären Sie anhand der Diskriminante der Gleichung $-\frac{1}{2} \cdot x^2 + p \cdot x + 1 = 2$, für welchen Wert des Parameters p die Figur genau ein Mal berührt wird. **D**

b) Bis unmittelbar vor Beginn der Spiele wurden mithilfe von Schneekanonen ungefähr 6,5 Millionen Liter Schnee produziert. Das ist laut „New York Times" genug, um mehr als 1 000 Fußballfelder mit einer Schneeschicht von 1 Zentimeter Höhe zu bedecken.

– Überprüfen Sie überschlagsmäßig, ob diese Behauptung stimmen kann, wenn man von Fußballfeldern mit je 68 m Breite und 105 m Länge ausgeht. **D**

c) Zur Beschneiung einer Piste kommen Propellerkanonen mit einer Leistung von 27 Kilowatt (kW) zum Einsatz.
Eine Propellerkanone hat einen Wasserdurchsatz von 1 Liter pro Sekunde $\left(\frac{L}{s}\right)$. Dies ergibt ein Schneevolumen von 9 Kubikmeter pro Stunde $\left(\frac{m^3}{h}\right)$.

– Geben Sie den Wasserverbrauch einer Propellerkanone in $\frac{m^3}{h}$ an. **B**

– Ermitteln Sie den Energieverbrauch in Kilowattstunden (kWh) zur Produktion von 15 m^3 Schnee. **B**

a) A_2.9, ***b)*** A_1.4, ***c)*** A_1.3

80 Windmühlen

Schon in der Antike war die Nutzung von Windenergie bekannt. Windmühlen wurden zum Mahlen von Getreide oder zum Pumpen von Wasser verwendet.

a) Die Windmühle in Podersdorf am See (Burgenland) ist eine der beiden letzten Windmühlen Österreichs und ist voll funktionsfähig. Die Höhe einer Flügelspitze über dem Drehpunkt lässt sich durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 10 \cdot \sin(1{,}2t)$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe einer Flügelspitze zur Zeit t in Meter (m)

B – Bestimmen Sie die Nullstellen im Intervall [0; 10].

C – Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstellen im Sachzusammenhang.

b) Man kann davon ausgehen, dass die stündliche Mahlmenge einer bestimmten Mühle annähernd normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von μ = 310 Kilogramm (kg) und einer Standardabweichung von σ = 10 kg. Die Wahrscheinlichkeit, dass die stündliche Mahlmenge unter der festgelegten Mindestmenge liegt, beträgt 2 %.

B – Berechnen Sie, wie groß diese Mindestmahlmenge ist.

80 % der Werte einer normalverteilten Größe liegen im Bereich $\mu \pm d$.

D – Argumentieren Sie, wie sich der Wert von d ändert, wenn die Standardabweichung σ verdoppelt wird.

c) Die Berechnung der kinetischen Energie E_{kin} erfolgt mit der Formel:

$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

m ... Masse des Objekts
v ... Geschwindigkeit
E_{kin} ... kinetische Energie

In den folgenden Grafiken wird die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Masse m bzw. von der Geschwindigkeit v dargestellt.

Energie
0

Energie
0

C – Beschriften Sie die waagrechte Achse mit der jeweils richtigen Größe.

D – Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) A_2.11, **b)** A_5.6, **c)** A_3.9

81 Modellauto

Während einer Testfahrt eines Modellautos wurden die Geschwindigkeiten aufgezeichnet. Die Grafik zeigt die vereinfachte Geschwindigkeit-Zeit-Funktion.

a) Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 60$ s beträgt $0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Erstellen Sie eine quadratische Funktion zur Beschreibung des Geschwindigkeitsverlaufs im Zeitintervall [0; 60] **AB**

b)
- Interpretieren Sie die Steigung der Sekante *f* im Sachzusammenhang. **C**
- Ermitteln Sie die Beschleunigung im Zeitintervall [240; 300]. **B**

c)
- Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsgraphen, welchen Weg das Auto im Zeitintervall [60; 300] zurückgelegt hat. **BC**

d) Die Geschwindigkeit *v* bei einer weiteren Testfahrt lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion modellieren:

$v(t) = -6 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 + 0{,}004 \cdot t^2 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 100$

t … Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

- Stellen Sie die Funktion *v* grafisch dar. **B**
- Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, ob das Auto auf der Strecke wieder umkehrt. **D**
- Stellen Sie eine Formel für den in den ersten 60 Sekunden zurückgelegten Weg auf. **A**

a) A_3.9, **b)** A_4.2, **c)** A_4.7, **d)** A_4.5, A_4.8

82 Lärmschutzwall

Die folgende Funktion beschreibt die Randkurve der Querschnittsfläche eines Lärmschutzwalls. Am unteren Ende befinden sich Entwässerungsgräben:

$y(x) = 0{,}0004x^4 - 0{,}08x^2 + 3$

x, y in Meter (m)

C

a) – Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die maximale Höhendifferenz h zwischen dem höchsten Punkt des Walls und dem tiefsten Punkt des Entwässerungsgrabens berechnet.

B

– Berechnen Sie die maximale Breite b eines Entwässerungsgrabens.

C

b) – Geben Sie an, in welchen Bereichen die Funktion streng monoton steigend bzw. fallend ist.

B

– Ermitteln Sie jene Stelle im Intervall [0; 10], an der das Gefälle am größten ist.

c) Auf dem höchsten Punkt des Walls wird ein Mast mit 2,7 m Höhe aufgestellt. Jemand spannt ein Seil von der Spitze zum Punkt A.

AB

– Berechnen Sie, welchen Winkel das Seil mit der Horizontalen einschließt.

d) Der Lärmschutzwall hat eine horizontale Länge von 1,5 Kilometer (km). Der obere Teil des Walls soll für einen Radweg abgetragen werden.

D

– Erklären Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im Sachzusammenhang:

$$\left(\int_{-2}^{2} y(x)\,dx - 4 \cdot y(2)\right) \cdot 1500$$

a) A_4.4, A_3.7, **b)** A_3.4, A_4.4, **c)** A_2.12, **d)** A_4.8

83 Wasserverbrauch

Für eine Umweltzeitschrift wurde der Wasserverbrauch in privaten Haushalten analysiert.

a) Aus einem undichten Wasserhahn tropfen pro Tag insgesamt 20 Liter Wasser. Das Volumen eines Wassertropfens beträgt 0,08 cm^3.
- Geben Sie das Volumen eines Wassertropfens in normierter Gleitkommadarstellung in dm^3 an. **B**
- Ermitteln Sie, wie viele Tropfen pro Sekunde fallen. **B**

b) Die Analyse des täglichen Wasserverbrauchs von privaten Haushalten einer bestimmten Stadt ergab folgende Werte in Liter:

85 90 105 115 125 130 130 135 140 470

- Ermitteln Sie den Median und das arithmetische Mittel. **B**
- Interpretieren Sie den Unterschied der beiden Werte. **C**

c) In einer bestimmten Stadt lässt sich der jährliche Wasserverbrauch durch folgende Funktion beschreiben:

$W(t) = 22 \cdot 10^6 \cdot 1{,}02^t$

t ... Zeit ab 2012 in Jahren
$W(t)$ ... Wasserverbrauch zur Zeit t in m^3

- Erklären Sie mithilfe der Rechenregeln für Potenzen, in welchem Maß sich der Wasserverbrauch innerhalb von 2 Jahren verändert. **D**
- Argumentieren Sie, ob der jährliche Wasserverbrauch in dieser Stadt in den nächsten 20 Jahren durch eine lineare Funktion modellierbar ist. **D**

d) Der Wasserverbrauch beträgt für ein Vollbad 150 Liter und für ein Duschbad 90 Liter. Jemand geht in einem bestimmten Zeitraum dreimal so oft duschen wie baden und verbraucht dafür 4 200 Liter.

- Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Anzahl der Duschbäder auf. **A**

a) A_1.2, A_1.3, ***b)*** A_5.2, ***c)*** A_2.2, A_3.6, ***d)*** A_2.4

Tabellenanhang

Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,10	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,20	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,30	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,40	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,50	0,69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,60	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,70	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,80	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,90	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,00	0,84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,10	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,20	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,30	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,40	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,50	0,93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,60	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,70	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,80	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,90	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,00	0,97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,10	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,20	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,30	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,40	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,50	0,99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,60	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,70	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,80	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,90	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,00	0,99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,10	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,20	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,30	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,40	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,50	0,99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,60	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,70	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,80	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,90	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4,00	0,99997	99997	99997	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998

Zu anderen in diesem Buch behandelten Verteilungen gibt es in diversen Formelsammlungen ebenfalls Tabellen. Allerdings können die entsprechenden Werte auch mit gängigen CAS-Rechnern sowie mit einschlägiger Software ermittelt werden. Die dazu notwendigen Befehle sind auch in frei zugänglicher Software wie „Open Office“ enthalten. Daher wird auf die Darstellung weiterer Tabellen verzichtet.

Sachwortverzeichnis

Sachwortverzeichnis

Sachwortverzeichnis

Sachwortverzeichnis

Sachwortverzeichnis

X

Y

Z

Diese Mathematikreihe bietet in zeitgemäßer Sprache und funktionellem Layout altersadäquate Zugänge zur Mathematik und ihren technischen Anwendungen. Nach lebensnahen Einstiegen erfolgt in schrittweisen Erklärungen eine Erarbeitung des Basiswissens.
Dieses wird in alltagsbezogenen und vernetzten Aufgaben angewendet und erweitert.

- altersadäquate Einstiege
- zeitgemäße Sprache und Layout
- alltagsbezogene und technische Aufgaben
- vernetzte Aufgaben

www.hpt.at

Mathematik mit techn. Anwend. 4 (LP 2011)
Schulbuchnummer: 170003
ISBN 978-3-230-03894-4
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9 783230 038944

$\pi \approx 3$